FONCTION CARRÉE – POLYNOMES DU SECOND DEGRÉ

1) LA FONCTION CARRÉE

A) DÉFINITION et VARIATIONS

Définition :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe son carré x^2, est appelée **fonction carrée.**

Remarque:

La fonction carrée n'est pas linéaire.

Propriété :

La fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ est **strictement décroissante** sur $]-\infty\,;0]$.

La fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$.

Preuve :

Soit a et b deux nombres réels tels que $a<b$. On a alors :

$$f(a)-f(b)=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

1er cas: $a<b\leqslant 0$

$a-b<0$ puisque $a<b$,
$a+b<0$ puisque a et b sont négatifs ou nuls.

D'après la règle des signes d'un produit, on en déduit que :

$$(a-b)(a+b)>0$$
$$\Leftrightarrow \quad f(a)-f(b)>0$$
$$\Leftrightarrow \quad f(a)>f(b)$$

Les images de a et de b par la fonction carrée sont donc dans l'ordre contraire de a et de b, ce qui démontre que la fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

2ème cas: $0\leqslant a<b$

$a-b<0$ puisque $a<b$,
$a+b>0$ puisque a et b sont positifs ou nuls.

D'après la règle des signes d'un produit, on en déduit que:

$$(a-b)(a+b)<0$$
$$\Leftrightarrow \quad f(a)-f(b)<0$$
$$\Leftrightarrow \quad f(a)<f(b)$$

Les images de a et de b par la fonction carrée sont donc dans le même ordre que a et b, ce qui démontre que la fonction carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Remarques :

- Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés
- Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés

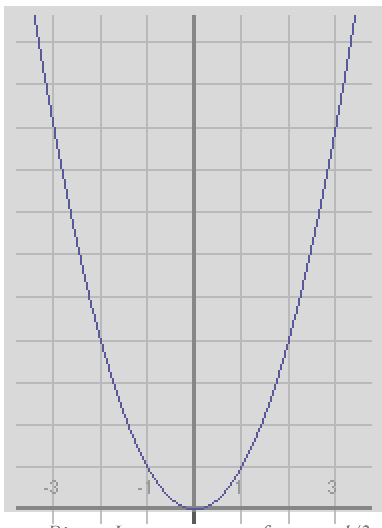
Le **tableau de variations** de la fonction carrée est donc:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction carrée admet un minimum en 0, de valeur 0.

$\forall\, x\in\mathbb{R},\ x^2\geq 0$ et $0^2=0$

B) REPRÉSENTATION GRAPHIQUE



x	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
$f(x)=x^2$	16	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9	16

Définition :

Dans un repère orthogonal $(O\,,I\,,J)$, la courbe représentative de la fonction carrée est appelée **parabole** d'équation $y=x^2$. (Elle est souvent notée $\mathcal{P}$)
Le point $O(0\,;0)$ est appelé **sommet de la parabole**.

Propriété :

Dans un repère orthogonal, la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Preuve :

Soit un point $M(x\,;\,y)$ appartenant à la parabole $\mathcal{P}$. On a alors $y = x^2$.

Le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées (Oy) est la point $M'(-x\,;\,y)$.
Or $(-x)^2 = x^2 = y$, donc M' appartient aussi à la parabole $\mathcal{P}$.
Ainsi, pour tout point M de $\mathcal{P}$, son symétrique par rapport à (Oy) appartient aussi à $\mathcal{P}$. On en déduit que $\mathcal{P}$ est symétrique par rapport à (Oy).

2) FONCTIONS POLYNOMES DU SECOND DEGRÉ

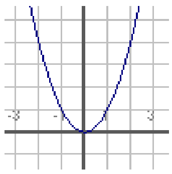
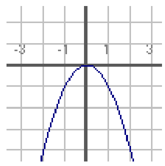
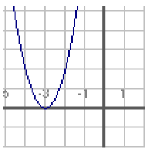
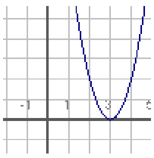
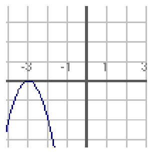
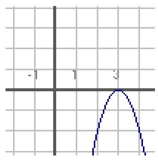
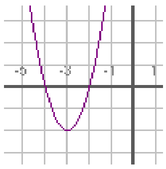
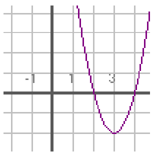
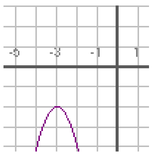
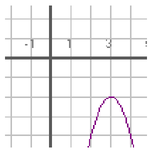
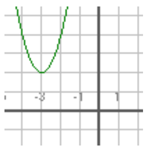
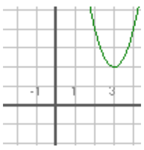
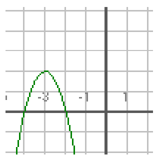
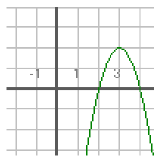
A) LES FONCTIONS $x \longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ (avec $a \neq 0$)

Définition :

Soit a, α et β trois nombres réels avec a non nul.
Dans un repère orthogonal (O, I, J), la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ est appelée **parabole** d'équation $y = a(x-\alpha)^2+\beta$. (Elle est souvent notée $\mathcal{P}$)

La fonction carrée est un cas particulier de cette famille de fonction.

Le tableau ci-dessous présente un inventaire des différentes situations en fonction des paramètres a, α et β.

	$a>0$		$a<0$	
ax^2				
	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$
$a(x-\alpha)^2$				
$a(x-\alpha)^2+\beta$ $\beta<0$				
$a(x-\alpha)^2+\beta$ $\beta>0$				
	Les branches de la parabole sont dirigées vers le haut.		Les branches de la parabole sont dirigées vers le bas.	

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	↘	β	↗

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	↗	β	↘

Remarque :

Le point le plus « bas » ou le plus « haut » de la parabole s'appelle **le sommet** de la parabole.

Les tableaux précédents permettent de conjecturer les propriétés suivantes.

Propriété :

- Si $a>0$, f est strictement décroissante, puis strictement croissante.
- Si $a<0$, f est strictement croissante, puis strictement décroissante.

Propriété :

$\mathcal{P}$ est symétrique par rapport à une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Il s'agit en fait, comme nous le verrons plus tard, de la droite d'équation $x=\alpha$.

B) LES FONCTIONS $x \longmapsto a\,x^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$)

Définition :

Soit a , b et c trois nombres réels avec a non nul.
On appelle fonction **polynôme du second degré**, toute fonction qui à tout réel x, associe le réel ax^2+bx+c.

On dit aussi polynôme de degré 2 ou trinôme du second degré.

Exemples :

- La fonction carrée et la fonction $f: x\longmapsto 2\,x^2-3x+5$ sont des polynômes du second degré.
- Les fonctions linéaires et affines ne sont pas des polynômes du second degré.

Remarque :
Toute fonction polynôme du second degré $f: x\longmapsto a\,x^2+bx+c$ peut s'écrire sous la forme $x\longmapsto a\,(x-\alpha)^2+\beta$.
Cette dernière écriture est appelée **forme canonique.**

Tous les résultats du paragraphe précédent peuvent donc s'appliquer.

3) ÉQUATION PRODUIT – INÉQUATION PRODUIT

Propriété :

Soit a , b , c et d quatre nombres réels avec a et b non nuls.
L'équation produit $(ax+b)(cx+d)=0$ admet deux solutions réelles : $-\dfrac{b}{a}$ et $-\dfrac{d}{c}$

$A\,B=0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$

Exemple :

$(-3\,x+1)(2\,x-5)=0 \;\Leftrightarrow\; x=\dfrac{1}{3}$ ou $x=\dfrac{5}{2}$

Remarque :
Les deux solutions peuvent éventuellement être confondues.

Propriété :

- Le produit de deux réels de même signe est positif.
- Le produit de deux réels de signes contraires est négatif.

Soit a , b , c et d quatre nombres réels avec a et b non nuls.
Pour résoudre l'inéquation $(ax+b)(cx+d)<0$, on étudie séparément les signes de $ax+b$ et de $cx+d$, puis à l'aide d'un tableau de signes on détermine le signe du produit $(ax+b)(cx+d)$.

La méthode est identique pour $(ax+b)(cx+d)\leq 0$, $(ax+b)(cx+d)\geq 0$ et $(ax+b)(cx+d)>0$

Exemple :

Résolution de $(-3\,x+1)(2\,x-5)>0$
A l'aide d'un tableau de signes, on étudie successivement les signes de $-3\,x+1$ et $2\,x-5$.
On en déduit le signe de $(-3\,x+1)(2\,x-5)$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-3\,x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$2\,x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-3\,x+1)(2\,x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $S=\left]\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{5}{2}\right[$