FONCTION CARRÉE – POLYNOMES DU SECOND DEGRÉ

1) LA FONCTION CARRÉE

A) DÉFINITION et VARIATIONS

Définition :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe son carré x^2, est appelée **fonction carrée.**

Remarque:
La fonction carrée n'est pas linéaire.

Propriété :

La fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ est

La fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ est

Preuve :

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On a alors :

$$f(a) - f(b) =$$

1er cas: $a < b \leqslant 0$

Les images de a et de b par la fonction carrée sont donc dans l'ordre contraire de a et de b, ce qui démontre que la fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

2ème cas: $0 \leqslant a < b$

Les images de a et de b par la fonction carrée sont donc dans le même ordre que a et b, ce qui démontre que la fonction carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Remarques :

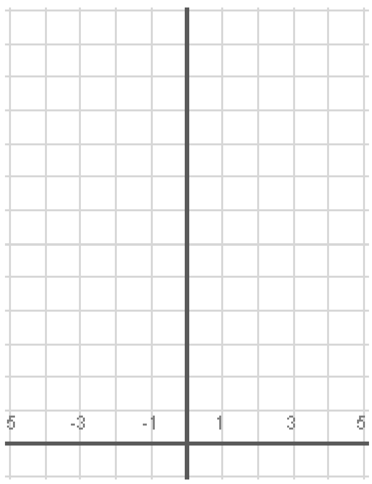
- Deux nombres positifs sont
- Deux nombres négatifs sont

Le **tableau de variations** de la fonction carrée est donc:

x	
f	

La fonction carrée admet un minimum en 0, de valeur 0.

B) REPRÉSENTATION GRAPHIQUE



x	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
$f(x) = x^2$											

Définition :

Dans un repère orthogonal $(O\,,I\,,J)$, la courbe représentative de la fonction carrée est appelée **parabole** d'équation $y = x^2$. (Elle est souvent notée $\mathcal{P}$)
Le point $O(0\,;0)$ est appelé **sommet de la parabole**.

Propriété :

Dans un repère orthogonal, la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Preuve :

Soit un point $M(x\,;y)$ appartenant à la parabole $\mathcal{P}$. On a alors $y=x^2$.

2) FONCTIONS POLYNOMES DU SECOND DEGRÉ

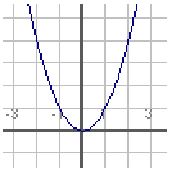
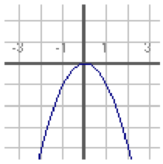
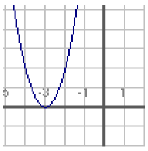
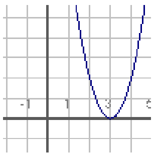
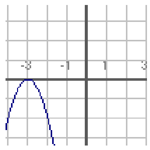
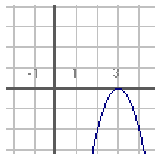
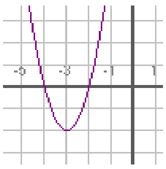
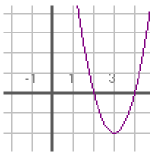
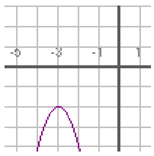
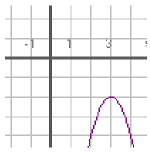
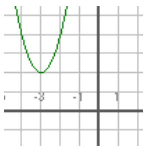
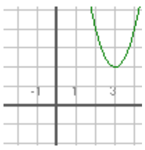
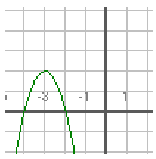
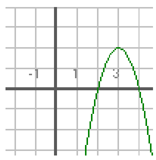
A) LES FONCTIONS $x \longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ (avec $a \neq 0$)

Définition :

Soit a , α et β trois nombres réels avec a non nul.
Dans un repère orthogonal $(O\,,I\,,J)$, la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ est appelée **parabole** d'équation $y=a(x-\alpha)^2+\beta$. (Elle est souvent notée $\mathcal{P}$)

La fonction carrée est un cas particulier de cette famille de fonction.

Le tableau ci-dessous présente un inventaire des différentes situations en fonction des paramètres a, α et β.

ax^2				
$a(x-\alpha)^2$				
$a(x-\alpha)^2+\beta$				
$a(x-\alpha)^2+\beta$				

x	
f	

x	
f	

Remarque :

Le point le plus « bas » ou le plus « haut » de la parabole s'appelle **le sommet** de la parabole.

Les tableaux précédents permettent de conjecturer les propriétés suivantes.

Propriété :

- Si $a > 0$, f est strictement décroissante, puis strictement croissante.
- Si $a < 0$, f est strictement croissante, puis strictement décroissante.

Propriété :

$\mathcal{P}$ est symétrique par rapport à une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Il s'agit en fait, comme nous le verrons plus tard, de la droite d'équation $x = \alpha$.

B) LES FONCTIONS $x \longmapsto a\,x^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)

Définition :

Soit a , b et c trois nombres réels avec a non nul.
On appelle fonction **polynôme du second degré**, toute fonction qui à tout réel x, associe le réel $ax^2 + bx + c$.

On dit aussi polynôme de degré 2 ou trinôme du second degré.

Exemples :

-
-

Remarque :
Toute fonction polynôme du second degré $f : x \longmapsto a\,x^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $x \longmapsto a\,(x - \alpha)^2 + \beta$.
Cette dernière écriture est appelée **forme canonique.**

Tous les résultats du paragraphe précédent peuvent donc s'appliquer.

3) ÉQUATION PRODUIT – INÉQUATION PRODUIT

Propriété :

Soit a , b , c et d quatre nombres réels avec a et b non nuls.
L'équation produit $(ax + b)(cx + d) = 0$ admet deux solutions réelles : $-\dfrac{b}{a}$ et $-\dfrac{d}{c}$

$A\,B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$

Exemple :

Remarque :
Les deux solutions peuvent éventuellement être confondues.

Propriété :

- Le produit de deux réels de même signe est positif.
- Le produit de deux réels de signes contraires est négatif.

Soit a , b , c et d quatre nombres réels avec a et b non nuls.
Pour résoudre l'inéquation $(ax + b)(cx + d) < 0$, on étudie séparément les signes de $ax + b$ et de $cx + d$, puis à l'aide d'un tableau de signes on détermine le signe du produit $(ax + b)(cx + d)$.

La méthode est identique pour $(ax + b)(cx + d) \leq 0$, $(ax + b)(cx + d) \geq 0$ et $(ax + b)(cx + d) > 0$

Exemple :

Résolution de $(-3\,x + 1)(2\,x - 5) > 0$
A l'aide d'un tableau de signes, on étudie successivement les signes de $-3\,x + 1$ et $2\,x - 5$.
On en déduit le signe de $(-3\,x + 1)(2\,x - 5)$.

x			
$-3\,x + 1$			
$2\,x - 5$			
$(-3\,x + 1)(2\,x - 5)$			

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc