PROBABILITÉS

1) EXPÉRIENCES ALÉATOIRES

A) EXPÉRIENCE ALÉATOIRE , ÉVENTUALITÉ , UNIVERS

Un exemple bien connu : *(On considère cet exemple jusqu'à la fin du chapitre)*

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et on note le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

Lancer ce dé **et noter** le nombre figurant sur une des faces est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat : 1 , 2 , … , 6 ?

On dit qu'il s'agit d'une **expérience aléatoire** , c'est à dire une expérience liée au hasard pouvant conduire à plusieurs issues, appelées **éventualités**.

Exemple : les éventualités sont 1 , 2 , 3 , 4 , 5 et 6

L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers** . En général, on le note Ω .
Exemple : $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$

B) ÉVÈNEMENT

Définition :

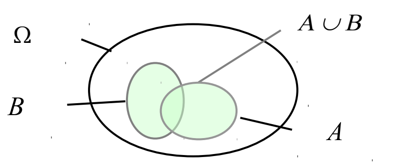
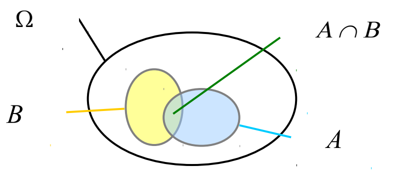
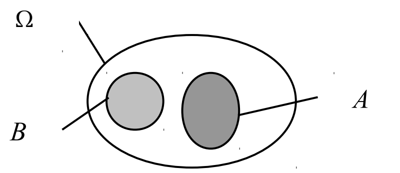
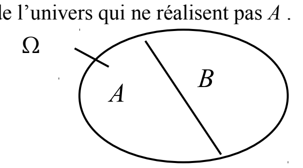
On appelle **événement** toute partie de l'univers .

Une éventualité ω **appartient** à l'univers Ω (on note $\omega \in \Omega$) .
Un événement A est **inclus** dans l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$) .

Exemple : Par exemple, on peut considérer l'événement A : « obtenir un nombre pair » . On a $A = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$

Remarque : Lorsqu'une éventualité ω appartient à un événement A, on dit que ω réalise A.

Le tableau ci-dessous résume les définitions et notations importantes relatives à la notion d'événement.
A, B et *C* représentent des événements d'un univers Ω lié à une expérience aléatoire.

VOCABULAIRE ET NOTATION	SIGNIFICATION	EXEMPLE
Cardinal de A : card (A)	nombre d'éventualités qui composent A	L'événement A : « obtenir un nombre pair » est composé de 3 éventualités . card (A) = 3
Événement élémentaire	événement réduit à une seule éventualité	L'événement B : « obtenir le nombre 3 » ; $B = \{ 3 \}$
Événement impossible : $A = \varnothing$	événement qui ne se réalise jamais	L'événement C : « obtenir un multiple de 3 inférieur ou égal à 2 »
Événement certain : $A = \Omega$	événement qui se réalise toujours	L'événement D : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 »
C est **la réunion** de A et de B : $C = A \cup B$ (on dit A ou B)	C' est l'ensemble des éventualités réalisant A ou B 	Soit l'événement E : « obtenir un nombre au moins égal à 4 » ; $E = \{ 4 ; 5 ; 6 \}$ Soit l'événement F : « obtenir un nombre impair » ; $F = \{ 1 ; 3 ; 5 \}$ L'événement $E \cup F$ est « obtenir un nombre au moins égal à 4 ou un nombre impair » $E \cup F = \{ 1 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$
C est **l'intersection** de A et de B : $C = A \cap B$ (on dit A et B)	C'est l'ensemble des éventualités réalisant A et B en même temps. 	L'événement $E \cap F$ est « obtenir un nombre au moins égal à 4 et un nombre impair » c'est à dire « obtenir un nombre impair au moins égal à 4 » $E \cap F = \{ 5 \}$
A et B sont **disjoints** ou **incompatibles**	A et B ne peuvent pas se réaliser en même temps ; $A \cap B = \varnothing$ 	Les événements E et B sont incompatibles . $E \cap B = \varnothing$
A et B sont **contraires** ou **complémentaires**. $B = \overline{A}$	$A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = \Omega$ $\overline{A}$ est l'événement constitué par les éventualités de l'univers qui ne réalisent pas A . 	Les événements A et F sont contraires. $F = \overline{A}$

2) LOI DE PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE FINI

Définition :

On note $\Omega = \{ \omega_1 , \omega_2 \ \dots \ \omega_n \}$ l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire.
Définir une loi de probabilité sur Ω, c'est associer à chaque résultat ω_i un nombre p_i (appelé probabilité de l'issue ω_i) positif ou nul de telle façon que :

- $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$
- La probabilité d'un événement A, notée $P (A)$, est la somme des probabilités p_i des éventualités qui constituent A.

Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité sur l'ensemble Ω des résultats possibles.
Les conditions de l'expérience conduisent le plus souvent au choix du modèle.

On garde ces notations pour le reste du chapitre.

Remarque : Pour toute éventualité ω_i on a : $0 \leqslant p_i \leqslant 1$.

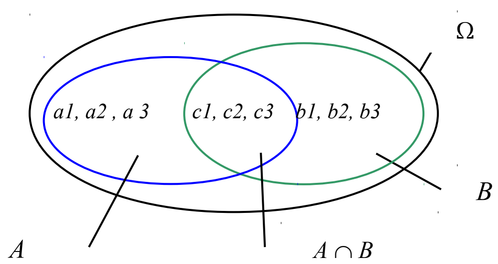
Propriétés :

Soit A et B deux événements de Ω , alors :

- La probabilité de l'événement certain est 1 ; $P (\Omega) = 1$
- La probabilité de l'événement impossible est 0 ; $P (\varnothing) = 0$
- Si $A \subset B$, alors $P (A) \leqslant P (B)$
- $P (A \cup B) = P (A) + P (B) - P (A \cap B)$

  Si A et B sont incompatibles , $P (A \cup B) = P (A) + P (B)$
- $P (\overline{A}) = 1 - P (A)$

Considérons l'exemple suivant *(dans le cas général, la démonstration est la même)*



Preuve : (des deux dernières propriétés)

1)
On a : $A = \{a1 , a2 , a3 , c1, c2 , c3 \}$ et $B = \{ b1 , b2 , b3 , c1 , c2 , c3 \}$
De plus $A \cap B = \{ c1 , c2 , c3 \}$ et $A \cup B = \{ a1 , a2 , a3 , c1, c2 , c3 , b1 , b2 , b3 \}$
On a alors :

$$P (A \cup B) = \underbrace{P (\{ a1 \}) + P (\{ a2 \}) + P (\{ a3 \}) + P (\{ c1\}) + P (\{ c2 \}) + P (\{ c3 \})}_{= P(A)} + P (\{ b1 \}) + P (\{ b2 \}) + P (\{ b3 \})$$

Or :

$$P (B) = \underbrace{P (\{ c1\}) + P (\{ c2 \}) + P (\{ c3 \})}_{= P (A \cap B)} + P (\{ b1 \}) + P (\{ b2 \}) + P (\{ b3 \})$$

on en déduit que :

$$P (A \cup B) = P (A) + P (B) - P (A \cap B)$$

Si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \varnothing$ et $P (A \cap B) = 0$, d'où $P (A \cup B) = P (A) + P (B)$

Par abus de langage, on note souvent $P (\omega)$ au lieu de $P (\{\omega\})$

2) On a $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$. Ainsi d'après la propriété précédente, on a : $P (\Omega) = P (A \cup \overline{A}) = P (A) + P (\overline{A}) - P (A \cap \overline{A})$
Or $P(\Omega) = 1$ et $P (A \cap \overline{A}) = 0$ …

3) CAS PARTICULIER : ÉQUIPROBABILITÉ

Définition - Propriété :

Lorsque tous les événements élémentaires d'un univers ont la même probabilité, on dit qu'il y a **équiprobabilité** .
Dans ce cas, si l'univers Ω est composé de n éventualités ω , on a :

$$p_i = P (\{ \omega \}) = \frac{1}{\text{card} (\Omega)}$$

On a alors, pour tout événement A : $P (A) = \dfrac{\text{card} (A)}{\text{card} (\Omega)}$

$$P (A) = \frac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$$

Remarque :
Les expressions suivantes « dé parfait ou équilibré » , « boules indiscernables » … indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

Exemple :
Le dé est non truqué : chacune des faces à la même chance d'être obtenue . Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
Dans ce cas, il est donc aisé de définir la loi de probabilité :

face	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On présente souvent les résultats dans un tableau

La probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre pair » est : $P (A) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

4) LOI DES GRANDS NOMBRES

Lorsque qu’on répète une expérience aléatoire, on appelle fréquence d’apparition d’une éventualité donnée, noté ω_i le nombre :

$$f_i = \frac{\textit{Nombre de fois où l'éventualité } \omega_i \textit{ est apparaît}}{\textit{Nombre de fois où l'expérience est répétée}}$$

On constate que si l’on répète un grand nombre de fois l’expérience donnée, les différentes fréquences d’apparition ont tendance à se stabiliser, ce qui n’est parfois que théorique car répéter une expérience aléatoire dans les mêmes conditions n’est pas toujours envisageable.

Ce constat est un résultat mathématique appelé « La loi des grands nombres » ; Il se démontre, mais la démonstration est largement hors de vos compétences :

Propriété :

Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de la loi de probabilité quand n devient grand.

Remarques :

- Dans certains cas, on utilise ce résultat pour valider ou rejeter un modèle choisi à priori.
- Dans d’autres cas, lorsqu’on ne connaît pas de loi de probabilité relativement à une expérience aléatoire, on peut ainsi en introduire une à partir des fréquences déterminées lors d’un grand nombre d’expériences.

Exemple :

Lorsqu’on jette n fois le dé, la fréquence d’apparition de chacun des nombres est très variable lorsque n est petit et se stabilise autour de $\frac{1}{6}$ pour n grand .

La loi de probabilité que nous avons définie (grâce à la situation d’équiprobabilité) pour l’expérience aléatoire est bien validée …