

FONCTIONS AFFINES

1) DÉFINITION

Définition :

On appelle **fonction affine** toute fonction de la forme $f : x \mapsto ax + b$ où a et b sont des réels fixés.

Exemple : La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto 3x - 2$ est une fonction affine.

Cas particuliers :

- Si $b = 0$, on dit que la fonction est **linéaire**.
- Si $a = 0$, la fonction est du type $f : x \mapsto b$ où b est un réel fixé, elle est donc **constante**.

2) PROPORTIONNALITÉ DES ACCROISSEMENTS

Exemple :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto 3x - 2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-14	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10

Ce tableau de valeurs n'est pas un tableau de proportionnalité car le rapport $\frac{f(x)}{x}$ n'est pas constant, la fonction f n'est donc pas linéaire.

Par contre, si on considère le rapport $\frac{f(u) - f(v)}{u - v}$ pour deux valeurs distinctes quelconques u et v , on constate qu'il semble être constant.

Dans l'exemple, on obtient toujours $\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = 3$

On dit que f est une fonction à **accroissement linéaire**.

Propriété :

Une fonction f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous réels distincts u et v , on a :

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$$

Ce qui revient à dire que l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de la variable et que le coefficient de proportionnalité est a .

Preuve :

- Soit a et b deux réels et la fonction affine f définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto ax + b$. Pour tous réels distincts u et v on a :

$$\Delta y = f(u) - f(v) = (au + b) - (av + b) = a(u - v) = a \Delta x$$

- Soit f une fonction telle que pour tous réels distincts u et v , on ait $\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$

En particulier pour tout réel x et pour le réel 0 , d'image $f(0) = b$, on obtient :

$$f(x) - b = a(x - 0) \Leftrightarrow f(x) = ax + b$$

On en déduit que f est une fonction affine.

3) REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Propriété :

La représentation graphique d'une fonction affine est **une droite**.

Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

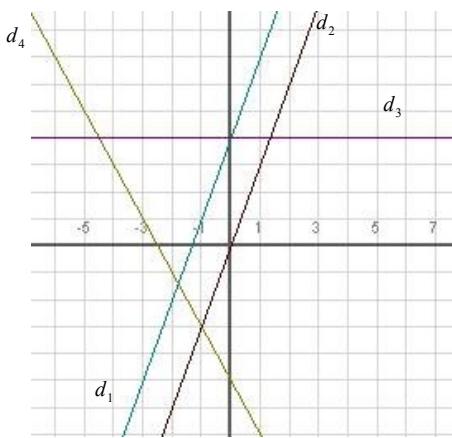
Une droite parallèle à l'axe des ordonnées ne peut représenter une fonction puisque cela signifierait qu'il existe un antécédent qui a une infinité d'images.

Cas particuliers :

- Si $b = 0$, la représentation graphique de f est une droite passant par l'origine O du repère.
- Si $a = 0$, la représentation graphique de f est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemples :

- La fonction $x \mapsto 3x + 4$ est représentée par la droite d_1
- La fonction $x \mapsto 3x$ est représentée par la droite d_2
- La fonction $x \mapsto -2x - 5$ est représentée par la droite d_4
- La fonction $x \mapsto 4$ est représentée par la droite d_3



4) SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION AFFINE

Propriété :

Soit la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ où a et b sont des réels fixés.

- Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

Preuve :

Soit deux réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$

- Si $a > 0$, alors :
$$ax_1 < ax_2$$

$$\Leftrightarrow ax_1 + b < ax_2 + b$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

- Si $a < 0$, alors :
$$ax_1 > ax_2$$

$$\Leftrightarrow ax_1 + b > ax_2 + b$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

5) SIGNE DE $ax + b$

Soit a et b deux réels, $a \neq 0$. On étudie le signe de $f(x) = ax + b$

- Si $a > 0$, $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{b}{a}; +\infty \right[\dots$
- Si $a < 0$, $ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x \in \left[-\infty; -\frac{b}{a} \right[\dots$

On peut résumer ceci dans les tableaux de signes suivants :

$a > 0$		$a < 0$	
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+
x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-