FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE

1) NOTION DE FONCTION

Définition :

Soit D_f un ensemble de nombre.
On appelle **fonction** f sur l'ensemble D_f le procédé mathématique qui permet d'associer à tout nombre x de D_f un réel unique noté $f(x)$.
On note $f : x \longmapsto f(x)$ *(lire :* « fonction f qui à tout x associe le nombre $f(x)$ »)

Vocabulaire :
- $f(x)$ est l'**image** de x ***(lire : "*** f ***de x ").***
- x est l'**antécédent** de $f(x)$
- D_f est l'**ensemble de définition** (ou domaine de définition) de f .

Remarques :

- x ne représente pas un réel donné, mais n'importe le quel des éléments de l'intervalle D_f . On dit que x est une variable.
(On peut aussi utiliser les lettres u , t , etc)
- On a appelé la fonction f , mais rien ne nous oblige à l'appeler ainsi . (On utilise souvent les lettres g , h , etc ou f_1 , f_2 ...)

Exemple :
Sur l'intervalle [-2 ; 2], on considère la fonction f définie par $f : x \longmapsto (x-1)^2-3$

$f(-2)=(-2-1)^2 \; -3=(-3)^2-3=9-3=6$ (L'image de -2 par la fonction f est 6.)

$f(0)=(0-1)^2-3=(-1)^2-3=1-3=-2$

Attention : $f(0)$ ne signifie pas $f \times 0$

On peut dresser un tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2

Remarques :

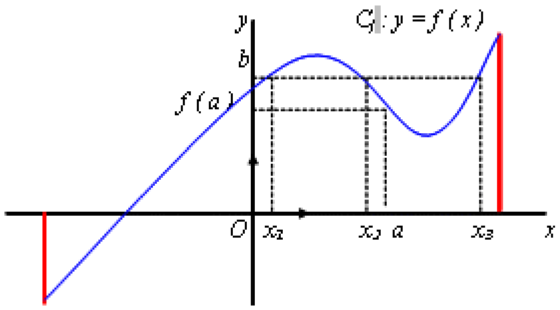
- Si un nombre n'a pas d'image, c'est qu'il n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction.
- Dans la pratique, les fonctions sont souvent données sans que soit précisé l'ensemble de définition.
Dans ce cas, il ne faut pas oublier de chercher D_f en se rappelant qu'il s'agit de tous les réels x tels que $f(x)$ soit "calculable".

2) REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

On considère le repère (O , I , J).

Définition :

On appelle **représentation graphique (ou courbe représentative) d'une fonction** f l'ensemble des points de coordonnées (x ; $f(x)$)
où x appartient à l'ensemble de définition .



On note, le plus souvent, C_f la courbe représentative de f .

On dit que la courbe C_f a pour équation cartésienne $y=f(x)$ relativement au repère (O , I , J).

Remarques :

- On a déjà insisté sur le fait que pour tout réel x de D_f , $f(x)$ est unique.

  On en déduit une interprétation géométrique : toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe représentative d'une fonction en au plus un point . Ceci est un moyen simple pour savoir si une courbe représente ou non une fonction …

- $f(a)$ est l'unique image de a . (On place a sur l'axe des abscisses et on lit son image $f(a)$ sur l'axe des ordonnées)

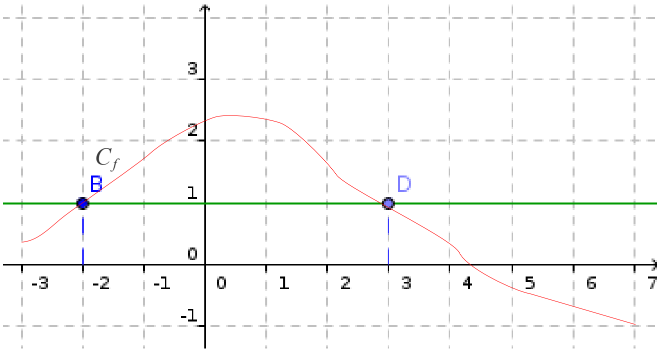
- x_1 , x_2 et x_3 sont les antécédents de b. (On place b sur l'axe des ordonnées et on lit ses antécédents x_1 , x_2 ... sur l'axe des abscisses)

- Un réel peut admettre aucun antécédent, ou un, ou plusieurs antécédents.

3) RÉSOLUTIONS GRAPHIQUES

A) f(x) = b - f(x) > b

On a représenté la courbe C_f représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3\,;7]$.



Résolution d'une équation :

Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=1$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite d'équation $y=1$.

$$S=\{-2\,;3\}$$

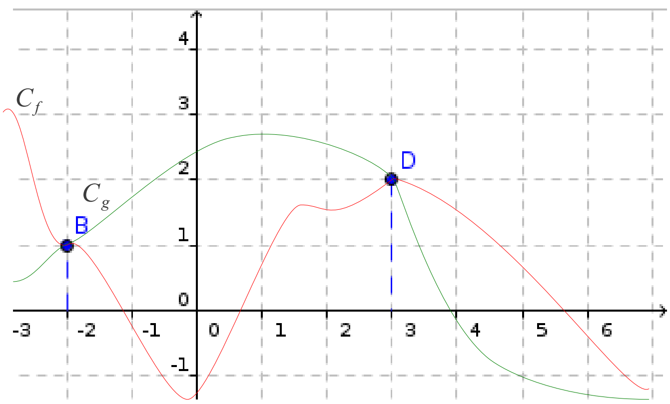
Résolution d'une inéquation :

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)<1$ revient à chercher les abscisses des points de la courbe C_f situés strictement « en dessous » de la droite d'équation $y=1$.

$$S=[-3\,;-2[\cup]3\,;7]$$

B) f(x) = g(x) - f(x) > g(x)

On a représenté les courbe C_f et C_g représentant deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3\,;7]$.



Résolution d'une équation :

Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g.

$$S=\{-2\,;3\}$$

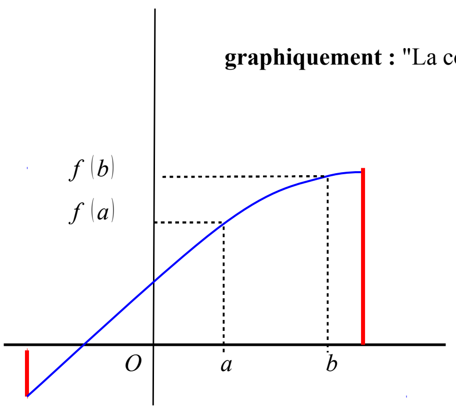
Résolution d'une inéquation :

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)>g(x)$ revient à chercher les abscisses des points de la courbe C_f situés strictement « au dessus » des points de la courbe C_g.

$$S=[-3\,;-2[\cup]3\,;7]$$

4) SENS DE VARIATIONS

graphiquement : "La courbe monte"



Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est **croissante** (respectivement **strictement croissante**) sur I ,

lorsque pour tous réels a et b de I , tels que $a<b$, on a $f(a)\leqslant f(b)$
(respectivement $f(a)<f(b)$)

Une fonction croissante conserve l'ordre.

Définition :

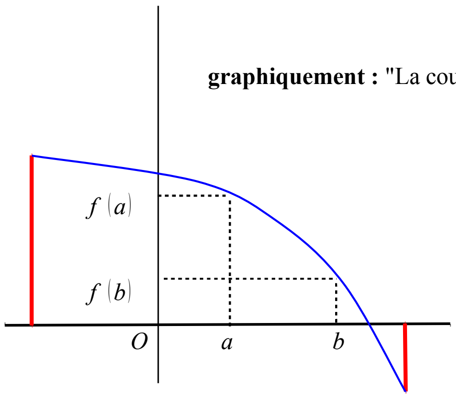
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est **décroissante** (respectivement strictement décroissante) sur I ,

lorsque pour tous réels a et b de I , tels que $a<b$, on a $f(a) \geq f(b)$
(respectivement $f(a)>f(b)$)

Une fonction décroissante change l'ordre.

graphiquement : "La courbe descend"



Remarques :

- f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur I , lorsque f est soit croissante (respectivement strictement) sur I , soit décroissante (respectivement strictement) sur I .
- On ne parle de croissance ou de décroissance que sur un intervalle.
- Etudier les variations d'une fonction, c'est préciser les intervalles sur lesquels la fonction est monotone.
  On résume ces résultats dans un tableau appelé **tableau de variations**.

Exemple :

La fonction $f:x \longmapsto (x-1)^2-3$ définie sur [-2; 2] est strictement décroissante sur [-2;1] et strictement croissante sur [1;2].

x	-2		1		2
f	6	↘	-3	↗	-2

5) EXTREMUM

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , x_m et x_M deux réels de I .
On dit que :

- f admet **un minimum** sur I en x_m , si pour tout réel x de I , $f(x_m) \leqslant f(x)$
- f admet **un maximum** sur I en x_M , si pour tout réel x de I , $f(x_M) \geqslant f(x)$

Exemple :

Pour la fonction $f:x \longmapsto (x-1)^2-3$,

-3 est un minimum sur $[-2;2]$ atteint pour $x=1$.