

FONCTIONS NUMÉRIQUES D'UNE VARIABLE RÉELLE

1) NOTION DE FONCTION

Définition :

Soit D_f un ensemble de nombres.

On appelle **fonction** f sur l'ensemble D_f le procédé mathématique qui permet d'associer à tout nombre x de D_f un réel unique noté $f(x)$.
On note $f : x \mapsto f(x)$ (*lire : « fonction f qui à tout x associe le nombre $f(x)$ »*)

Vocabulaire :

- $f(x)$ est l'**image** de x (*lire : " f de x "*).
- x est l'**antécédent** de $f(x)$
- D_f est l'**ensemble de définition** (ou domaine de définition) de f .

Remarques :

- x ne représente pas un réel donné, mais n'importe lequel des éléments de l'intervalle D_f . On dit que x est une variable.
(On peut aussi utiliser les lettres u , t , etc)
- On a appelé la fonction f , mais rien ne nous oblige à l'appeler ainsi. (On utilise souvent les lettres g , h , etc ou f_1 , f_2 ...)

Exemple :

Sur l'intervalle $[-2 ; 2]$, on considère la fonction f définie par $f : x \mapsto (x - 1)^2 - 3$

$$f(-2) = (-2 - 1)^2 - 3 = (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6 \quad (\text{L'image de } -2 \text{ par la fonction } f \text{ est } 6.)$$

$$f(0) = (0 - 1)^2 - 3 = (-1)^2 - 3 = 1 - 3 = -2$$

Attention : $f(0)$ ne signifie pas $f \times 0$

On peut dresser un tableau de valeurs :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2

Remarques :

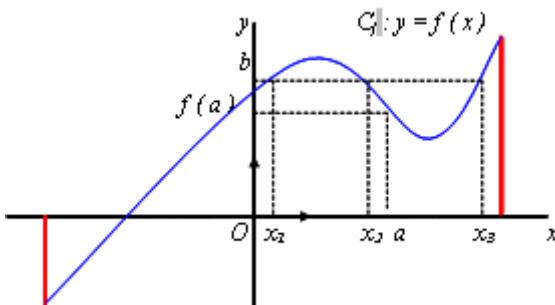
- Si un nombre n'a pas d'image, c'est qu'il n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction.
- Dans la pratique, les fonctions sont souvent données sans que soit précisé l'ensemble de définition.
Dans ce cas, il ne faut pas oublier de chercher D_f en se rappelant qu'il s'agit de tous les réels x tels que $f(x)$ soit "calculable".

2) PRÉSENTATION GRAPHIQUE

On considère le repère (O, I, J) .

Définition :

On appelle **représentation graphique** (ou **courbe représentative**) d'une fonction f l'ensemble des points de coordonnées $(x ; f(x))$ où x appartient à l'ensemble de définition .



On note, le plus souvent, C_f la courbe représentative de f .

On dit que la courbe C_f a pour équation cartésienne $y = f(x)$ relativement au repère (O, I, J) .

Remarques :

- On a déjà insisté sur le fait que pour tout réel x de D_f , $f(x)$ est unique.

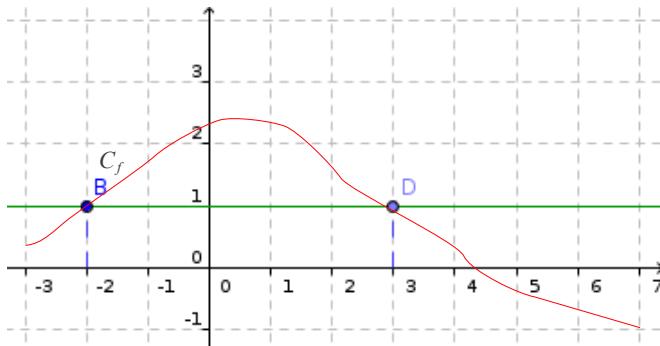
On en déduit une interprétation géométrique : toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe la courbe représentative d'une fonction en au plus un point. Ceci est un moyen simple pour savoir si une courbe représente ou non une fonction ...

- $f(a)$ est l'unique image de a . (On place a sur l'axe des abscisses et on lit son image $f(a)$ sur l'axe des ordonnées)
- x_1 , x_2 et x_3 sont les antécédents de b . (On place b sur l'axe des ordonnées et on lit ses antécédents x_1 , x_2 ... sur l'axe des abscisses)
- Un réel peut admettre aucun antécédent, ou un, ou plusieurs antécédents.

3) RÉSOLUTIONS GRAPHIQUES

A) $f(x) = b$ - $f(x) > b$

On a représenté la courbe C_f représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 7]$.



Résolution d'une équation :

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite d'équation $y = 1$.

$$S = [-2 ; 3]$$

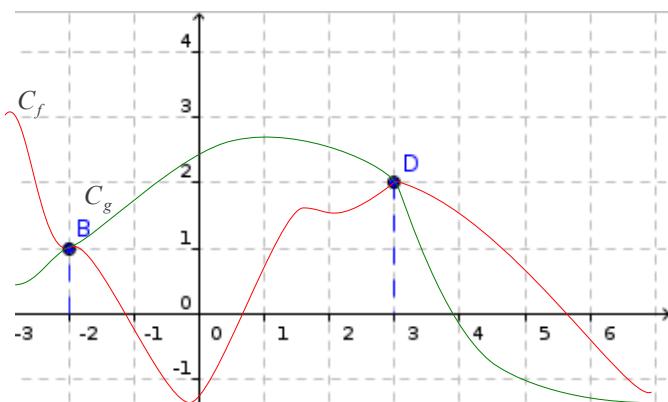
Résolution d'une inéquation :

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 1$ revient à chercher les abscisses des points de la courbe C_f situés strictement « en dessous » de la droite d'équation $y = 1$.

$$S = [-3 ; -2] \cup [3 ; 7]$$

B) $f(x) = g(x)$ - $f(x) > g(x)$

On a représenté les courbes C_f et C_g représentant deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3 ; 7]$.



Résolution d'une équation :

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ revient à chercher les abscisses des points d'intersection des courbes C_f et C_g .

$$S = [-2 ; 3]$$

Résolution d'une inéquation :

Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$ revient à chercher les abscisses des points de la courbe C_f situés strictement « au dessus » des points de la courbe C_g .

$$S = [-3 ; -2] \cup [3 ; 7]$$

4) SENS DE VARIATIONS

Définition :

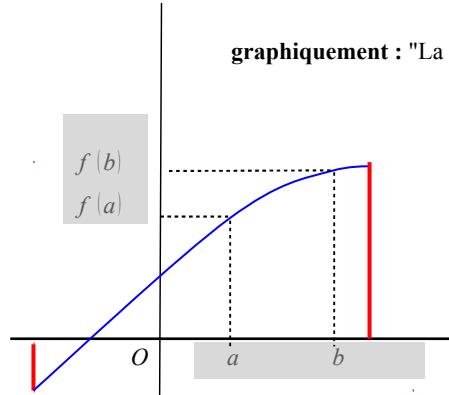
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est **croissante** (respectivement **strictement croissante**) sur I ,

lorsque pour tous réels a et b de I , tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$
(respectivement $f(a) < f(b)$)

Une fonction croissante conserve l'ordre.

graphiquement : "La courbe monte"



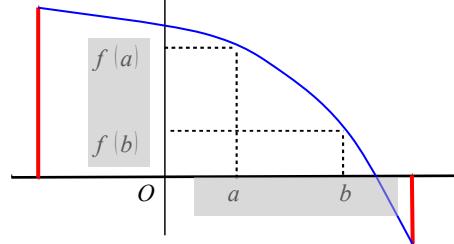
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est **décroissante** (respectivement strictement décroissante) sur I , lorsque pour tous réels a et b de I , tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$ (respectivement $f(a) > f(b)$)

Une fonction décroissante change l'ordre.

graphiquement : "La courbe descend"



Remarques :

- f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur I , lorsque f est soit croissante (respectivement strictement) sur I , soit décroissante (respectivement strictement) sur I .
- On ne parle de croissance ou de décroissance que sur un intervalle.
- Etudier les variations d'une fonction, c'est préciser les intervalles sur lesquels la fonction est monotone.
On résume ces résultats dans un tableau appelé **tableau de variations**.

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto (x - 1)^2 - 3$ définie sur $[-2; 2]$ est strictement décroissante sur $[-2; 1]$ et strictement croissante sur $[1; 2]$.

x	-2	1	2
f	6	-3	-2

5) EXTREMUM

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , x_m et x_M deux réels de I .

On dit que :

- f admet **un minimum** sur I en x_m , si pour tout réel x de I , $f(x_m) \leq f(x)$
- f admet **un maximum** sur I en x_M , si pour tout réel x de I , $f(x_M) \geq f(x)$

Exemple :

Pour la fonction $f : x \mapsto (x - 1)^2 - 3$,

-3 est un minimum sur $[-2 ; 2]$ atteint pour $x = 1$.