FONCTION INVERSE ET ÉQUATIONS QUOTIENTS

1) LA FONCTION INVERSE

A) DÉFINITION et VARIATIONS

Définition :

La fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ qui à tout nombre réel x non nul associe son inverse $\frac{1}{x}$, est appelée **fonction inverse**.

Remarques :

- Le nombre 0 n'appartient pas au domaine de définition de la fonction inverse car on ne peut pas diviser par 0.
- La fonction inverse n'est pas linéaire.

Propriété :

La fonction inverse $g:x\longmapsto\frac{1}{x}$

La fonction inverse $g:x\longmapsto\frac{1}{x}$

Preuve :

Soit deux réels a et b de l'ensemble de définition de la fonction inverse $g:x\longmapsto\frac{1}{x}$ tels que $a<b$. On a alors:

$$g(a)-g(b)=$$

1er cas: $a<b<0$

Les images de a et b par la fonction inverse sont donc rangées dans l'ordre contraire de a et de b , ce qui démontre que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

2ème cas: $0<a<b$

Démonstration identique

Remarques :

- Deux nombres strictement positifs sont
- Deux nombres strictement négatifs sont

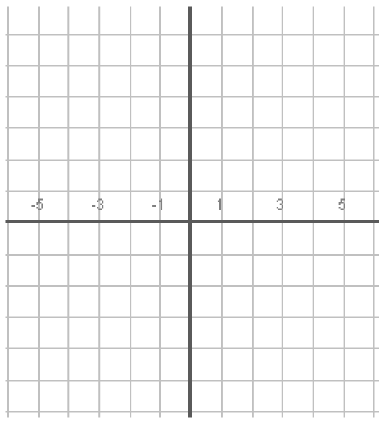
Le **tableau des variations** de la fonction inverse est donc:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g			

La double barre verticale en 0 est là pour signifier que la fonction inverse n'est pas définie en 0.

B) REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

x	-4	-3	-2	-1	$-0{,}5$	$-0{,}2$	0,25	0,5	1	2	3	4
$g(x)=\frac{1}{x}$												



Définition :

Dans un repère orthogonal (O,I,J) , la courbe représentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole** d'équation $y=\frac{1}{x}$. (Elle est souvent notée $\mathcal{H}$)

Propriété :

Dans un repère orthogonal, l'hyperbole $\mathcal{H}$ représentant la fonction inverse est symétrique par rapport à

Preuve :

Soit un point $M(x;y)$ appartenant à $\mathcal{H}$. On a alors $y=\dfrac{1}{x}$.

Le symétrique de M par rapport à O est le point $M'(-x;-y)$.

Or $\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}=-y$, donc M' appartient aussi à $\mathcal{H}$.

Ainsi pour tout point M de $\mathcal{H}$, son symétrique par rapport à O appartient aussi à $\mathcal{H}$. On en déduit que $\mathcal{H}$ est symétrique par rapport à O.

2) ÉQUATION QUOTIENT – INÉQUATION QUOTIENT

Propriété :

Soit a, b, c et d quatre nombres réels avec c et $ad-bc$ non nuls.

L'équation quotient $\dfrac{ax+b}{cx+d}=0$ n'a de sens que pour $x\neq-\dfrac{d}{c}$.

Cette équation admet pour unique solution $-\dfrac{b}{a}$.

Exemple :

Pour , l'unique solution de $\dfrac{-3x+1}{2x-5}=0$ est . (Résultat que l'on retrouve sur le graphique)

Propriété :

- Le quotient de deux réels de même signe est positif.
- Le quotient de deux réels de signes contraires est négatif.

Soit a, b, c et d quatre nombres réels avec c et $ad-bc$ non nuls.

Pour résoudre l'inéquation $\dfrac{ax+b}{cx+d}<0$, on étudie séparément les signes de $ax+b$ et de $cx+d$, puis à l'aide d'un tableau de signes on détermine le signe du quotient $\dfrac{ax+b}{cx+d}$. La méthode est identique pour $\dfrac{ax+b}{cx+d}\geqslant 0$, $\dfrac{ax+b}{cx+d}\leqslant 0$ et $\dfrac{ax+b}{cx+d}>0$

Exemple :

Résolution de $\dfrac{-3x+1}{2x-5}<0$

A l'aide d'un tableau de signes, on étudie successivement les signes de $-3x+1$ et $2x-5$.

On en déduit le signe de $\dfrac{-3x+1}{2x-5}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-3x+1$			
$2x-5$			
$\dfrac{-3x+1}{2x-5}$			

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc . (Résultat que l'on retrouve sur le graphique)