CALCUL NUMÉRIQUE

1) ENSEMBLE DES NOMBRES

A) DÉFINITIONS ET NOTATIONS

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **nombres entiers naturels** . $\mathbb{N}$ = { 0 , 1 , 2 , 3 , ... }
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **nombres entiers relatifs** **(ou *nombres entiers*)** $\mathbb{Z}$ = { ... , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ... }
- **D** est l'ensemble des **nombres décimaux** . (nombres s'écrivant $n \times 10^p$ avec n et p dans $\mathbb{Z}$)

Exemple : $26 \times 10^{-2} = 0,26$; $-7 \times 10^4 = -70000$

- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels** . (nombres que l'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul)

Exemple : $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $-\frac{5}{7}$

- On appelle **nombre irrationnel** tout nombre que l'on ne peut pas écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul

Exemple : $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels** , c'est à dire qui sont soit rationnels, soit irrationnels.

B) SYMBOLES D'INCLUSION

Soit A et B deux ensembles :

$A \subset B$ se lit : " A est **inclus** dans B " , " A est **contenu** dans B " ou " A est **une partie** de B "
$A \subset B$ signifie que tout élément de l'ensemble A appartient à l'ensemble B.

Si A n'est pas inclus dans B on note : $A \not\subset B$

Exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$ car par exemple $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$

2) RAPPELS

A) PRODUITS Soit a , b , c et d des réels :

RÈGLE DES SIGNES	• $a \times (-b) = (-a) \times b = -ab$ • $(-a) \times (-b) = ab$
PRODUIT NUL	Dire qu'un produit est nul signifie que l'un des facteurs au moins est nul
SIMPLIFICATION	$ac = bc$ et $c \neq 0$ $\Rightarrow$ $a = b$
DISTRIBUTIVITÉ	• $c\,(a+b) = ca + cb$ • $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
PRODUITS REMARQUABLES	• $(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$ • $(a-b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$ • $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ **Exemple :** 1) Développer et réduire a) $(x-2y)^2 = x^2 - 4\,xy + 4\,y^2$ b) $(2x+y)^2 = 4\,x^2 + 4\,xy + y^2$ c) $(a-b)^2 + (2a-5b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 + 4\,a^2 - 20\,ab + 25\,b^2 = 5a^2 - 22\,ab + 26\,b^2$ d) $(3x-4y)(3x+4y) = 9\,x^2 - 16\,y^2$ e) $(\sqrt{2} - \sqrt{7x})(\sqrt{2} + \sqrt{7x}) = 2 - 7x$

	2) Factoriser a) $x^2-4x+4 = (x-2)^2$ b) $4y^2-12y+9 = (2y-3)^2$ c) $16a^2-80a+100 = (4a-10)^2$ d) $5x^2-7y^2 = (\sqrt{5}x-\sqrt{7}y)(\sqrt{5}x+\sqrt{7}y)$ e) $(x-y)^2-(2x-4y)^2 =$ $((x-y)-(2x-4y))((x-y)+(2x-4y))=(x-y-2x+4y)(x-y+2x-4y)=(-x+3y)(3x-5y)$

B) QUOTIENTS Soit a , b , c et d des réels avec c et d non nuls :

GÉNÉRALITÉS	$\frac{a}{1}=a$; $\frac{0}{c}=0$; $\frac{a}{0}$ est impossible
RÈGLE DES SIGNES	$\frac{-a}{c}=\frac{a}{-c}=-\frac{a}{c}$; $\frac{-a}{-c}=\frac{a}{c}$
SIMPLIFICATION	$\frac{ad}{cd}=\frac{a}{c}$ **Attention :** $\frac{a+d}{c+d}\neq\frac{a}{c}$
ÉGALITÉ	$\frac{a}{c}=0 \Leftrightarrow a=0$; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \Leftrightarrow ad=bc$
ADDITION	$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$; $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+bc}{cd}$
MULTIPLICATION	$\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}$
DIVISION	$\frac{1}{\frac{c}{d}}=\frac{d}{c}$; $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$ (avec $b\neq 0$) ; $\frac{a}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{c}$; $\frac{\frac{a}{c}}{d}=\frac{a}{cd}$ **Exemple :** Écrire sous forme irréductible le nombre suivant : $\mathrm{A}=\dfrac{\frac{4}{5}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{4}{7}}=\dfrac{\frac{12}{15}+\frac{10}{15}}{\frac{7}{21}-\frac{12}{21}}=\dfrac{\frac{22}{15}}{-\frac{5}{21}}=-\left(\frac{22}{15}\right)\times\left(\frac{21}{5}\right)=-\frac{22\times 3\times 7}{5\times 3\times 5}=-\frac{154}{25}$

C) PUISSANCES Soit a et b des réels et p et q des entiers :

DÉFINITION	$a^0=1$; $a^p=a\times a\times\ldots\times a$ (p facteurs , $p\geq 1$) ; $a^1=a$ $a^{-p}=\frac{1}{a^p}$; $a^{-1}=\frac{1}{a}$ $(a\neq 0)$
SIGNE	Pour p pair $(-a)^p=a^p$ et pour p impair $(-a)^p=-a^p$
RÈGLES DE CALCUL	Pour a et b non nuls : $a^p\times a^q=a^{p+q}$; $\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$; $(a^p)^q=a^{pq}=(a^q)^p$ $(ab)^p=a^p\times b^p$; $\left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}$

NOTATION SCIENTIFIQUE	La notation scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule et p est un entier. **Exemple :** Écrire les nombres ci-dessous sous forme scientifique : A=0,0452 = $4,52 \times 10^{-2}$; B=12478 = $1,2478 \times 10^{4}$ $C=\frac{((-7)^3\times(-10)^{-8})^5}{(-7^2\times10^4)^7}=\frac{(-(7)^3\times(10)^{-8})^5}{-(7^2\times10^4)^7}=\frac{(7^3\times(10)^{-8})^5}{(7^2\times10^4)^7}=\frac{7^{15}\times(10)^{-40}}{7^{14}\times10^{28}}=7\times10^{-68}$

D) RACINES CARRÉES

DÉFINITION	Lorsque a est un nombre positif , $\sqrt{a}$ désigne l'unique nombre positif dont le carré est égal à a . **Attention:** un nombre négatif n'a pas de racine carrée.
RÈGLES DE CALCUL	Pour a et b positif : $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2=a$; $\sqrt{a^p}=(\sqrt{a})^p$ (p entier naturel) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($b \neq 0$) **Exemple :** 1) Écrire les nombres ci-dessous sous la forme $a\sqrt{b}$ où b est le plus petit entier possible. a) $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ b) $\sqrt{72}=6\sqrt{2}$ c) $\sqrt{500}=10\sqrt{5}$ d) $\sqrt{147}=7\sqrt{3}$ 2) Écrire les nombres ci-dessous sans racine carrée au dénominateur : a) $\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{11}}{\sqrt{11}\times\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{77}}{11}$ c) $\frac{3}{5-\sqrt{3}}=\frac{3\times(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})}=\frac{15+3\sqrt{3}}{25-3}=\frac{15+\sqrt{3}}{22}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{((\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{6}}{2-3}=-2-\sqrt{6}$
MISE EN GARDE	• Il n'existe pas de relation simple entre $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ • Si $a<0$ alors $\sqrt{a^2}=-a$
ÉQUATION $x^2=a$	Soit a un réel , l'équation $x^2=a$ • n'admet pas de solution si $a<0$ • admet une unique solution 0 si $a=0$ • admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a>0$ **Exemple :** 1) Résoudre les équations ci-dessous : a) $x^2=5$ $\Leftrightarrow$ $x=-\sqrt{5}$ ou $x=\sqrt{5}$ b) $t^2=3-\pi$ $3-\pi<0$, donc il n'y a pas de solution. c) $(x-2)^2=8$ $\Leftrightarrow$ $x-2=-\sqrt{8}$ ou $x-2=\sqrt{8}$ $\Leftrightarrow$ $x=2-2\sqrt{2}$ ou $x=2+2\sqrt{2}$ d) $3x^2=7$ $\Leftrightarrow$ $(\sqrt{3}x)^2=7$ $\Leftrightarrow$ $\sqrt{3}x=-\sqrt{7}$ ou $\sqrt{3}x=\sqrt{7}$ $\Leftrightarrow$ $x=-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ ou $x=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$ $\Leftrightarrow$ $x=-\sqrt{\frac{7}{3}}$ ou $x=\sqrt{\frac{7}{3}}$