Restituer les notions du cours

Ex 9-1 : Vrai ou faux

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω et on note X et Y deux variables aléatoires définies sur Ω.

1) Une variable aléatoire est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

2) Une variable aléatoire ne prend que des valeurs entières.

3) Une variable aléatoire ne prend que des valeurs comprises entre 0 et 1.

4) Les ensembles Ω et $X(\Omega)$ ont le même nombre d'éléments.

5) Si x_1 et x_2 sont deux valeurs distinctes prises par une variable aléatoire X, alors les événements $\{X=x_1\}$ et $\{X=x_2\}$ sont incompatibles.

6) La loi de probabilité de X est une fonction définie sur Ω.

7) Le tableau de valeurs ci-dessous est celui de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	-0,15	0,2	0,3	14
$P(X=x_i)$	0,2	0,4	0,1	0,3

8) Le tableau de valeurs ci-dessous est celui de la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	0,005	0,2	3,7	14
$P(X=x_i)$	0,2	0,4	0,15	0,3

9) On peut définir sur Ω une infinité de variables aléatoires.

10) Les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ ont le même nombre d'éléments.

11) Si on appelle x_i les n valeurs prises par X et y_j les m valeurs prises par Y, alors $\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(Y=y_j)$

12) $P(X>3)=P(X\geqslant 4)$

13) $P(X\leqslant 3)\leqslant P(X\leqslant 6)$

14) $P(X=-2)=1-P(X=2)$

15) $P(3\leqslant X\leqslant 4)=P(X=3)+P(X=4)$

Déterminer la loi d'une variable aléatoire

Ex 9-2 : Définir plusieurs variables aléatoires à partir d'une expérience

On lance cinq fois de suite une pièce de monnaie.
Déterminer, à partir de cette expérience aléatoire, deux variables aléatoires ainsi que les ensembles des valeurs prises par ces variables aléatoires.

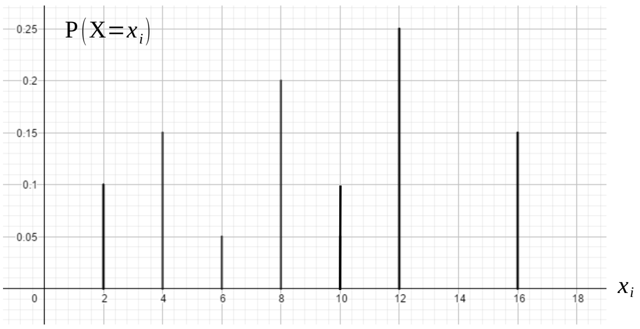
Ex 9-3 : Déterminer la loi d'un variable aléatoire

On choisit aléatoirement un entier compris entre 1 et 20 :
- s'il est premier on gagne 3 euros.
- si c'est un multiple de 4, on gagne un euro.
- sinon, on perd deux euros.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Ex 9-4 : Variable aléatoire à partir d’un graphique

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, définie par la représentation graphique ci-dessous.



2) Calculer $P(X \geqslant 8)$ et $P(\overline{X \geqslant 8})$

Ex 9-5 : Représenter graphiquement une variable aléatoire

Une urne contient deux boules blanches et une boule rouge.
On tire deux boules de l'urne successivement et avec remise . On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Représenter graphiquement X.

3) Reprendre les questions dans le cas de tirages sans remise.

Ex 9-6 : Représenter graphiquement une variable aléatoire

On lance deux dés tétraédriques numérotés de 1 à 4.
On appelle X la variable aléatoire égale à la somme des résultats des deux dés.
1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) Représenter graphiquement X.

3) Calculer $P(X \geqslant 4)$ et $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$

Ex 9-7 : Déterminer la loi d'une variable aléatoire

Un élève peu sérieux répond de façon aléatoire « vrai ou faux » à un questionnaire comportant trois questions.
Chaque réponse juste rapporte deux points et chaque réponse fausse fait perdre un point .
Le total des points de l'exercice est ramené à 0 s'il est négatif.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus par l'élève peu sérieux.

Déterminer la loi de probabilité de X .

Ex 9-8 : Simuler une variable aléatoire

Une variable aléatoire X admet la loi de probabilité suivante :

x_i	-2,1	-0,8	3,4	5,7	8
$P(X=x_i)$	0,24	0,17	0,35	0,09	0,15

1) Compléter la fonction Simu_X() écrite en Python ci-dessous afin qu’elle simule la variable aléatoire X.

```
from random import random

def Simu_X():
    alea=……...
    if alea<……...:
        return(……...)
    if alea<……...:
        return(……...)
    if alea<0.76:
        return(3.4)
    if alea<0.85:
        return(5.7)
    return(……...)
```

2) Calculer $P(X<0)$

3) a) Écrire un programme simulant 1000 fois cette expérience et calculant la fréquence de simulations donnant un résultat négatif.

b) Tester ce programme.

c) Que penser du résultat obtenu ?

Espérance, variance et écart type

Ex 9-9 : Estimer par simulation l’espérance et l’écart type

On reprend les données de l’exercice 8.

x_i	-2,1	-0,8	3,4	5,7	8
$P(X=x_i)$	0,24	0,17	0,35	0,09	0,15

1) Compléter le programme ci-dessous écrit en Python utilisant la fonction Simu_X() de l’exercice 8, afin qu’il donne une estimation de la moyenne et de l’écart type en simulant 1000 fois l’expérience.

```
from math import sqrt

moy=………
for i in range(1000):
    moy=……...…...……...
moy=……...……...
print(moy)

s=0
for i in range(1000):
    s=……...……...
s=sqrt(s/1000)
print(s)
```

2) a) L'espérance de X notée μ vaut environ 2,26 (à 0,01 près) et son écart type noté σ vaut environ 3,55 (à 0,01 près).

Compléter le programme écrit en Python ci-dessous afin de simuler 200 échantillons de 400 simulations de X.

```
from math import sqrt

def echant(n):
    m=……...……...
    for i in range(n):
        m=m+simu_X()
    return m/n

L=[]
for j in range(200):
    L.append(……...……...)
mu=2.26
si=3.55
c=……...……...

for valeur in L:
    if abs(valeur-mu)<……...……...:
        c=c+1
print(……...……...)
```

b) Estimer avec ce programme la proportion d'échantillons donc la moyenne m vérifie : $|m-\mu|\leqslant\frac{2\sigma}{\sqrt{400}}$

<u>Ex 9-10 :</u> Définir une variable aléatoire d'espérance donnée

1) a) Définir une variable aléatoire X prenant les valeurs 0 , 2 et 5 dont l'espérance est 2.

b) Peut-on définir une variable aléatoire X prenant les valeurs 0 , 2 et 5 dont l'espérance est 0 ?

2) Définir deux variables aléatoires X et Y prenant les valeurs -3 , 0 , 1 et 2 dont l'espérance est nulle . X et Y ont-elles même variance ?

<u>Ex 9-11 :</u> $\mathrm{E}(aX+b)$ et $\sigma(aX+b)$

Soit X une variable aléatoire telle que E(X)=4 et $\sigma(\mathrm{X})=0,124$
1) Calculer E(-4X) et σ (-4X)

2) Calculer E(X+5) et σ (X+5)

3) Calculer E(-4X+5) et σ (-4X+5)

4) On augmente toutes les valeurs de X de 20 %, que peut-on dire de la nouvelle espérance de X et de son nouvel écart type ?

<u>Ex 9-12 :</u> Jeu favorable ou pas, jeu équitable -V(aX+b)

La roue d'une loterie comporte 10 secteurs identiques dont 4 rapportent 1 euro, 5 rapportent 3 euros et 1 rapporte 10 euros.
Le joueur doit miser 3 euros avant de lancer la roue.

1) Le jeu est-il favorable au joueur ?
(On note X la variable aléatoire utilisée)

2) Déterminer le montant de la mise pour que le jeu soit équitable.
(On note Y la variable aléatoire utilisée)

3) Exprimer Y en fonction de X.

4) Avec cette nouvelle mise, les gains du jeu sont-ils plus dispersés qu'avant ou non ?

Exercice 13 : Jeux équitables - V(aX+b)

On joue à « pile ou face » et on considère deux règles de jeu différentes.

- **Règle 1** : si on obtient face on gagne 1 euro sinon on perd 1 euro
- **Règle 2** : si on obtient face on gagne 1000 euros sinon on perd 1000 euros

1) Justifier que ces deux jeux sont équitables.
(On note X et Y les variables aléatoires utilisées)

2) Exprimer Y en fonction de X.

3) Auquel des deux jeux joueriez-vous ?
Quel calcul permet de mesurer le risque ?

Exercice 14 : Roulette

Au jeu de la roulette comportant 37 cases numérotées de 0 à 36, on peut jouer selon la règle du « plein » :

- on mise x euros sur un numéro compris entre 0 et 36.

- si le joueur a deviné le bon numéro, il gagne 35 fois sa mise.

1) On note G la variable aléatoire donnant le gain du casino .
Calculer l’espérance de G (avantage du casino) et interpréter le résultat.

2) Le casino envisage une seconde règle selon laquelle un joueur peut aussi choisir de miser sur quatre numéros.
Par combien le casino doit-il multiplier la mise du joueur en cas de gain de celui-ci pour que l’ avantage du casino soit le même avec les deux règles ?

3) L’écart type des gains est-il encore le même ?

Variable aléatoire définie par répétition

Ex 9-15 : Tirages avec et sans remise

Une urne contient deux boules bleues et trois boules vertes . On tire deux boules de l'urne successivement et avec remise . On appelle X la variable aléatoire égale à 5 si les deux boules sont de la même couleur et égale à -3 si les boules sont de couleurs différentes.

1) Représenter cette situation à l’aide d’un arbre pondéré.

2) Déterminer la loi de probabilité de X .

3) Calculer l'espérance X.

4) Reprendre les questions précédentes en considérant des tirages sans remise . On note Y la nouvelle variable aléatoire.

Ex 9-16 : Des glaces et des beignets

Un marchand ambulant vend des glaces à 3 euros et des beignets à 2 euros.
Le marchand sert trois clients qui achètent chacun un produit.
On note G_i l'événement « le ième client achète une glace » et B_i l'événement « le ième client achète un beignet » .
On a $P(G_i)=0,6$.

1) Modéliser cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2) Calculer la probabilité de l'événement C « le marchand vend deux glaces et un beignet »

3) On note X la variable aléatoire donnant le nombre de glaces vendues. Déterminer la loi de probabilité de X.

4) Déterminer la probabilité qu'au moins deux glaces soient vendues.

Ex 9-17 : Urne et variable aléatoire de gain

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : trois rouges, quatre bleues et trois vertes.
Un joueur tire une boule au hasard :
- si elle est rouge, il gagne 10 euros
- si elle est bleue, il perd 8 euros
- si elle est verte, il remet la boule et rejoue.
- si la seconde boule tirée est rouge, il gagne 8 euros, sinon il perd 6 euros.

1) Représenter cette expérience à l'aide d'un arbre pondéré et déterminer l'ensemble des issues possibles.

2) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G égale au gain du joueur.

3) Calculer l'espérance de G et interpréter le résultat.

Algorithmes - Python

Ex 9-18 : Simuler une expérience aléatoire

1) Quelle expérience aléatoire est simulée par la fonction écrite en Python ci-dessous et comment est définie la variable aléatoire X ?

```
from random import randint

def nb_jets():
    x=0
    s=0
    while (s<10) :
        t=randint(1,6)
        s=s+t
        x=x+1
    return(x)
```

2) Compléter le programme ci-dessous utilisant la fonction nb_jets() pour qu'il simule n fois l'expérience précédente et permette de compléter le tableau suivant :

```
c=[]
f= ……
n=int(input("Nombre de simulations :"))
for i in range(0,11):
    c.append(0)
    f.append(0)

for i in range (………):
    x=…………
    c[x]=…………

for i in range(2,11):
    f[i]=…………
    print("P(X=",i,")=",f[i])
E=0

for i in range(2,11):
    E=…………
print ("L'espérance est environ",E)
```

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=i)$ $n=100$									
$P(X=i)$ $n=1000$									
$P(X=i)$ $n=10000$									

Les fréquences ont tendance à se stabiliser pour n suffisamment grand . Comment se nomme ce phénomène ?

Que calcule aussi ce programme ?

<u>Ex 9-19 :</u> Un paradoxe historique

À la cours de Florence au XVI^{e} siècle, le Duc de Toscane fin observateur remarque que lorsque l'on lance trois dés et que l'on fait la somme des 3 résultats, la somme 10 apparaît plus fréquemment que la somme 9, alors que 9 et 10 se décomposent tous deux en six sommes de trois entiers compris entre 1 et 6.

1) Vérifier les dires du Duc de Toscane sur la décomposition de 9 et 10.

2) A l'aide d'un algorithme ou d'un tableur, calculer les fréquences d'apparition des sommes 9 et 10 sur un grand nombre de lancers de trois dés.

3) Expliquer le paradoxe.