Définition :

Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction. Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.

En général, une variable aléatoire est notée X, Y , Z

Soit $\Omega=\{\omega_1 , \omega_2 , \dots , \omega_n\}$ l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

- On appelle **variable aléatoire** toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel x.
- **L'événement** de Ω, noté $\{X=x\}$, est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X.
- $X(\Omega)=\{x_1 , x_2 , \dots , x_m\}$, l'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X . Cet ensemble est parfois noté Ω '.

Notations importantes :

On note $\{X\geqslant a\}$, l'événement « la variable aléatoire X prend une valeur supérieure ou égale à a », c'est à dire l'ensemble des éléments de Ω qui ont une image supérieure ou égale à a par X .

On définit de même $\{X\leqslant a\}$, $\{X>a\}$ et $\{X<a\}$.

Loi de probabilité :

La loi de probabilité de X est la fonction définie sur $X(\Omega)$, qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $P(X=x_i)$

On démontre facilement que

$$\sum_{i=1}^{m} P(X=x_i)=1$$

m représente le nombre de valeurs prises par X

Espérance, variance et écart type d'une variable aléatoire :

- **Espérance mathématique** de X : $E(X)=\sum_{i=1}^{m} P(X=x_i)\,x_i$
- **Variance** de X : $V(X)=\sum_{i=1}^{m} P(X=x_i)(x_i-E(X))^2=\sum_{i=1}^{m} P(X=x_i)\,x_i^{\,2}-E(X)^2$
- **Écart type** : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

Cette deuxième formule est plus simple à utiliser

Comme en statistique descriptive, l'écart type mesure **la dispersion** . Plus l'écart type est faible, plus les valeurs tendent à être regroupées autour de l'espérance

Interprétation de l'espérance :

On peut interpréter l'espérance comme étant la valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions ou encore comme étant la valeur que l'on peut espérer obtenir.

Gain :

Si la variable aléatoire X désigne **le gain d'un jeu**, on dit que ce jeu est **équitable** lorsque **E(X)=0**.

Espérance et variance de *aX+b*

Soit $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$. On a :

$$E(aX+b)=aE(X)+b \qquad V(aX+b)=a^2V(X)$$

Dans toutes les situations étudiées en première, la variable aléatoire X prend **un nombre fini de valeurs** .

On dit que X est **une variable aléatoire discrète**.