Suites arithmétiques - Définition

Ex 8-1 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

Soit (u_n) la suite arithmétique de 1^{er} terme 3 et de raison 4.

1) $u_9-4=u_8$

2) $u_{13}-u_{11}=8$

3) $u_{n+1}=u_n+3$

4) $u_{n+1}=n+4$

5) $u_n=3n+4$

6) $u_n=4n+3$

7) $u_n=u_1+4(n-1)$

Ex 8-2 : QCM : un peu de logique

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Parmi les propositions suivantes la ou lesquelles caractérisent-elles la suite (u_n) ?

a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists r\in\mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}-u_n=r$

b) $\exists n\in\mathbb{N}$ et $\exists r\in\mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}-u_n=r$

c) $\exists r\in\mathbb{R}$, tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=r$

Ex 8-3 : Reconnaître une suite arithmétique

Indiquer dans chaque cas, si la suite est arithmétique . Dans l'affirmative, indiquer la raison et le 1^{er} terme.

1) $u_n=4n+8$

2) $u_n=2^n+4$

3) $\begin{cases} u_0=-3 \\ u_{n+1}=u_n+2n \end{cases}$

4) (u_n) est la suite des nombres entiers naturels multiples de 5.

5) $u_n=f(n)$, où f est une fonction affine

6) $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}-u_n=-2 \end{cases}$

7) $u_n=\sqrt{n^2+25}$

8) $u_n = \frac{1}{7}n - \frac{1}{9}$

9) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + \frac{3}{7} \end{cases}$

10) $u_n = \frac{n+4}{4}$

<u>Ex 8-4 :</u> Déterminer un terme d'une suite arithmétique

1) Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_7 = -5$ et $u_{37} = 41$.
Déterminer u_0 et u_{10}

2) On considère (v_n) la suite des nombres entiers naturels pairs.
Déterminer v_{41} .

3) Soit (w_n) la suite définie par $w_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_{n+1} = w_n + 3$. Déterminer w_{27} .

<u>Ex 8-5 :</u> Problème : abonnements

Le 01/01/2015, un journal comptait 15000 abonnés.
Une étude a montré que, chaque mois, 850 abonnement arrivent à échéance.
Sur ce 850 abonnements, 90 % sont renouvelés.
De plus 240 nouveaux abonnements sont souscrits.
On note (u_n) le nombre d'abonnements du journal au bout de n mois à partir du 01/01/2015 . On a $u_0 = 15000$.

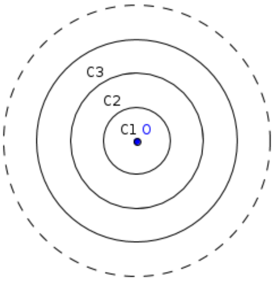
1) Calculer u_1 et u_2 .

2) Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique.

3) En estimant que l'évolution des abonnements reste celle montrée par l'étude, prévoir le nombre d'abonnés au journal le 01/01/2025.

Ex 8-6 : **Problème : cible**

1) Soit O un point du plan et pour chaque entier naturel n non nul, on note C_n le cercle de centre O dont le rayon mesure n cm.
Montrer que les rayons des cercles forment une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.



2) Pour chaque entier naturel n non nul, on note A_n l'aire en cm^2 du disque de rayon n . La suite (A_n) est-elle arithmétique ?

3) On note S_1 l'aire du disque de rayon 1cm ($S_1 = A_1$) et, pour chaque entier naturel $n \geqslant 2$, on note S_n l'aire de la couronne délimitée par les cercles C_n et C_{n-1} .
a) Démontrer que la suite (S_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

b) Déterminer l'aire de la couronne délimitée par les cercles C_{12} et C_{11} .

Étudier le comportement d'une suite arithmétique

Ex 8-7 : **Sens de variation et limites**

Déterminer dans chaque cas, le sens de variation et la limite de (u_n) .

1) $u_n = -\frac{1}{3}n + 4$

2) $u_n = 5n - \frac{3}{7}$

3) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - u_{n+1} = \frac{13}{14} \end{cases}$

Ex 8-8 : **Suite homographique**

Situation 1 : utiliser une suite auxiliaire arithmétique

Remarque :
Une suite homographique est une suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = \frac{a u_n + b}{c u_n + d}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n} \end{cases}$.

1) Conjecturer le sens de variation de (u_n) .

On admet, ce que l'on pourra prouver en terminale par récurrence, que la suite (u_n) prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

2) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que la suite est arithmétique.

b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n .

c) Justifier le sens de variation de (u_n) conjecturé à la question 1).

Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Ex 8-9 : Quelques calculs

1) Calculer $\sum_{i=0}^{21} u_i$ où (u_n) est la suite arithmétique de 1^{er} terme 2 et de raison 3.

2) calculer $T=\frac{1}{3}+1+\frac{5}{3}+\frac{7}{3}+3+\ldots+\frac{19}{3}+7$

3) $R=1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}+\ldots+90$

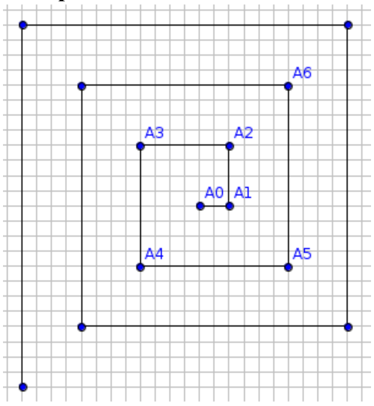
4) $S=10^5\times10^6\times10^7\times\ldots\times10^{15}$

Ex 8-10 : Problème : fréquentation dans un parking

On constate une fréquentation de 350 voitures le premier jour d'exploitation d'un parking . On prévoit une augmentation du passage dans ce parking, de 10 voitures supplémentaires chaque jour.
Quelle est la somme totale de voitures passées dans ce parking la première semaine d'exploitation ?

Ex 8-11 : Problème : longueur d'une spirale

On considère la spirale ci-contre ;
Pour tout entier naturel n , on pose $u_n=A_nA_{n+1}$



1) On a $u_0=2$.

Déterminer u_1 et u_2 .

2) Déterminer la nature de la suite (u_n) .

3) Calculer la longueur de la spirale $A_0\ A_1\ A_2\ \ldots\ A_{12}$

Ex 8-12 : Problème : coût total

On dispose d'un crédit de 414000 euros pour atteindre dans un désert une nappe souterraine . Le coût du forage est fixé à 1000 euros pour le premier mètre creusé, 1200 pour le deuxième, 1400 pour le troisième et ainsi de suite en augmentant de 200 euros par mètre creusé.
On pose $u_0=1000$, $u_1=1200$ …
u_n désigne donc le coût en euros du $(n+1)ième$ mètre creusé.

1) a) Calculer u_5

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , pour tout $n\in\mathbb{N}$.

c) Déduire du b) la nature de la suite (u_n) .

d) Exprimer u_n en fonction de n , pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on désigne par S_n le coût total en euros d'un puits de n mètres.
Déterminer le coût total d'un puits de n mètres.

3) Déterminer la profondeur maximale que l'on peut atteindre avec le crédit de 414000 euros.

Suites géométriques – Définition

Ex 8-13 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

Soit (u_n) la suite géométrique de 1^{er} terme 8 et de raison 3.

1) $3u_8=u_9$

2) $\frac{u_{13}}{u_{11}}=9$

3) $u_{n+1}=8u_n$

4) $u_{n+1}=3u_n$

5) $u_n=3\times 8^n$

6) $u_n=8\times 3^n$

7) $u_n=u_1+3^{n-1}$

Ex 8-14 : Géométrique et arithmétique

Existe-t-il une suite qui soit à la fois arithmétique et géométrique ?

Ex 8-15 : Reconnaître une suite géométrique

Indiquer dans chaque cas, si la suite est géométrique . Dans l'affirmative, indiquer la raison et le 1^{er} terme.

1) $u_n=2\times 5^{n+1}$

2) $\begin{cases} u_0=1 \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\sqrt{3} \end{cases}$

3) $u_n=\dfrac{3}{5^n}$

4) $u_n=\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$

5) $u_n=3\times n^7$

6) $\begin{cases} u_0=10 \\ u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n}{3} \end{cases}$

7) $u_n=\dfrac{5}{2^n}$

8) $u_n=\dfrac{7^{n+1}}{3^n}$

9) $u_n=11\times 5^{2n+1}$

10) $u_n=n^3$

Ex 8-16 : Déterminer un terme d'une suite géométrique

1) Soit (u_n) la suite définie par $u_0=65536$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{4}$. Déterminer u_1 , u_2 et u_6 .

2) Soit (u_n) la suite géométrique telle que $u_7=12$ et $u_8=18$.
déterminer u_0 et u_{15} .

<u>Ex 8-17 :</u> Trois termes consécutifs

1) Les trois nombres -5 , 85 et -1445 sont-ils trois termes consécutifs d'une suite géométrique ? Si oui, préciser la raison de la suite.

2) Même question avec :
a) 2,71 , 10,0812 et 37,50206

b) $-\frac{17}{3}$, $-\frac{84}{27}$ et $\frac{215}{147}$

<u>Ex 8-18 :</u> Problème : décote d'une voiture

Supposons que la décote d'une voiture est de 20 % par an.
Neuve, elle vaut 18000 euros. Combien vaudra-t-elle dans 5 ans ?

<u>Ex 8-19 :</u> Problème : population d'une ville

Depuis 30 ans, la population d'une ville diminue de 1 % par an.
Aujourd'hui, il y a 44382 habitants . Combien y en avait-il il y a trente ans ?

<u>Ex 8-20 :</u> Problème : deux possibilités (suites arithmétique et géométrique)

Dans une entreprise, une machine a été achetée 10000 euros.
Deux possibilités ont été envisagées pour prendre en compte l'usure et le vieillissement de la machine.

1) Première possibilité :
On estime que la machine perd 20 % de sa valeur par an . Déterminer la valeur de la machine au bout de 5 ans.

2) Deuxième possibilité :
On estime que la machine perd 2000 euros par an . Déterminer la valeur de la machine au bout de 5 ans.

Ex 8-21 : Moyenne arithmétique et moyenne géométrique

1) Démontrer que la moyenne arithmétique de trois termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à l'un de ces trois termes.

2) On appelle moyenne géométrique de deux nombres réels positifs a et b le nombre $m=\sqrt{ab}$.
Soit (u_n) une suite géométrique de 1^{er} terme $u_0>0$ et de raison $q>0$.
Démontrer que chacun des termes (excepté u_0) est égal à la moyenne géométrique du terme qui le précède et du terme qui le suit.

Étudier le comportement d'une suite géométrique

Ex 8-22 : Sens de variation et limites

Déterminer dans chaque cas, le sens de variation et la limite de (u_n) .

1) $u_n=-\frac{1}{3}\times 4^n$

2) $u_n=-6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$

3) $u_n=\frac{5^{n-1}}{7}$

4) $u_n=\left(-\frac{5}{4}\right)^n$

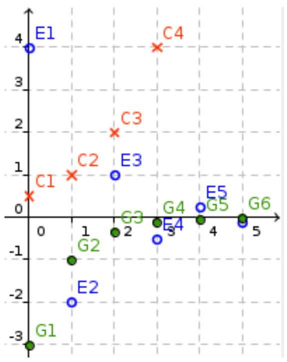
5) $u_n = \dfrac{13}{8^n}$

6) $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{13}{12} \end{cases}$

<u>Ex 8-23 :</u> Interpréter une représentation graphique

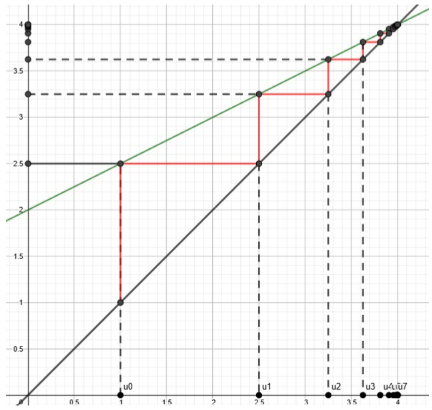
1) Trois suites géométriques ont été représentées ci-contre avec GeoGebra.

Déterminer pour chacune d'elle sa raison, son premier terme, son sens de variation et sa limite.

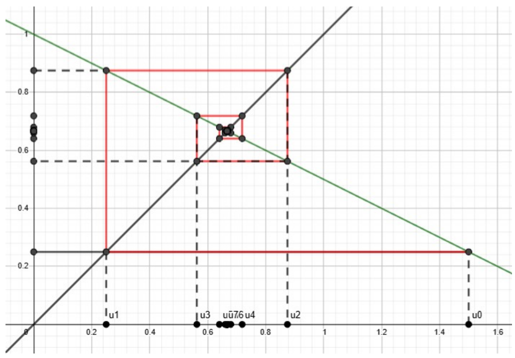


2) Deux suites arithmético-géométriques (suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = a\,u_n + b$ avec $a \neq 0$) ont été représentées ci-dessous. Pour chacune des suites, déterminer son sens de variation, sa limite puis son premier terme la formule de récurrence.

a)



b)



Ex 8-24 : Suite arithmético-géométrique
Utiliser une suite auxiliaire géométrique

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=-4 \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3 \end{cases}$.

1) Représenter graphiquement la suite (u_n), puis conjecturer la limite de (u_n).

2) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n=u_n-4$.

a) Montrer que la suite est géométrique.

b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

c) Justifier la limite de (u_n) conjecturée à la question 1).

d) Peut-on avoir $u_n=4$?

Ex 8-25 : Problème : population de bactéries

Dans un milieu de culture adéquat, le taux de croissance d'une population de bactéries Escherichia coli est de 700 % par heure.

On note p_0 la population initiale de bactérie et p_n la population après n heures de culture.
Expliquer pourquoi le taux de croissance ne peut se maintenir à ce niveau durant une longue période de temps.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

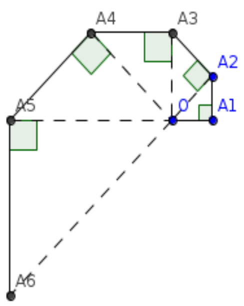
Ex 8-26 : Quelques calculs

1) Calculer $\sum_{i=0}^{21} u_i$ où (u_n) est la suite géométrique de 1^{er} terme 2 et de raison 3.

2) Calculer $S=9+27+81+\ldots+59049$

3) Calculer $T=-\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots-\left(\frac{1}{3}\right)^7+\left(\frac{1}{3}\right)^8$

<u>Ex 8-27 :</u> Problème : longueur d'une spirale



À partir de deux points O et A_1 du plan tel que $OA_1=1$, on construit le triangle OA_1A_2 rectangle et isocèle en A_1 .
Pour tout entier naturel $n\geqslant 2$, on construit les points A_n tels que le triangle OA_nA_{n+1} soit rectangle et isocèle en A_n .
Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose $u_n=A_nA_{n+1}$.

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) Conjecturer la nature de la suite (u_n) .

3) Calculer la longueur de la spirale $A_1A_2\ldots A_{15}$

Ex 8-28 : Problème : production totale

En janvier 2014, une firme offrait sur le marché 2000 unités d'un nouveau produit, avec une perspective d'augmentation de cette production de 5 % par an.

On suppose que ces prévisions allaient se poursuivre. On pose $p_0=2000$.

On note p_n la quantité offerte en janvier de l'année $(2014+n)$.
Pour 2015 , $n=1$; pour 2016 , $n=2$ …

1) Calculer p_1 , p_2 , p_3 .

2) Exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, p_{n+1} en fonction de p_n . En déduire la nature de la suite (p_n) .

3) Exprimer p_n en fonction de n .

4) Calculer la production totale prévisible entre janvier 2014 et janvier 2025.

Ex 8-29 : Suite arithmético-géométrique
Utiliser une suite auxiliaire géométrique

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+3 \end{cases}$

1) a) Calculer u_1 et u_2 .

b) La suite u est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier.

2) À l'aide de la calculatrice :
a) Déterminer une valeur approchée de u_{15} à 10^{-6} près.

b) Que remarque-t-on lorsque l'on soustrait 6 à chaque terme de la suite u ?

3) Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$, par $v_n=u_n-6$.
a) Démontrer que v_n est une suite géométrique.

b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

c) Retrouver alors u_{15} .

4) Calculer $S=\sum_{i=0}^{20} v_i$ et $T=\sum_{i=0}^{20} u_i$

Algorithme – Python

Ex 8-30 : Somme de termes consécutifs

1) Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 3,1 et de premier terme $u_0=2,7$. Pour calculer $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$, on utilise la fonction incomplète écrite en python ci-dessous :

```
1 def somme1(n):
2     U=2.7
3     S=.........
4     for i in range(1,.........):
5         U=U+3.1
6         S=.........
7     return(.........)
```

a) Compléter cette fonction.

b) Que saisir en ligne 8 ou dans la console pour obtenir la somme S_{21} ?

2) On considère la fonction écrite en python ci-dessous :

```
1 def somme2(u0,r,M):
2     T=0
3     U=u0
4     while U<=M:
5         T=T+U
6         U=U+r
7     return(T)
```

Que saisir en ligne 8 ou dans la console pour obtenir la somme $T=10+13+16+\ldots+145$? Déterminer cette somme.

3) Ecrire une fonction somme3(u0,q,M) permettant de calculer la somme $R=6400+3200+1600+\ldots+25$, puis déterminer cette somme en écrivant print(somme3(6400,1/2,25)).

Ex 8-31 : Algorithme de seuil – proportion de filles

Un concours scientifique est organisé depuis 2021.
Les filles ne représentaient alors qu'un quart des participants . Entre 2021 et 2025, on a constaté une augmentation moyenne annuelle de la proportion des filles participant à ce concours de 12 %.
On extrapole que la proportion de filles va continuer de progresser ainsi pendant 10 ans.
1) a) Quelle était la proportion de filles en 2022.

b) Pour tout entier naturel n , on note p_n la proportion de filles de l'année $2021+n$.
Pour $n<10$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .

c) En déduire la nature de la suite (p_n) .

2) On considère la fonction Proporfilles écrite en python ci-dessous :

```python
def Proporfilles(t):
    p=0.25
    n=0
    while p<t:
        p=1.12*p
        n=n+1
    return n+2021
```

Quelle est la valeur de Proporfilles(0,5) ? Interpréter ce résultat.

<u>Ex 8-32 :</u> Avec deux suites

Sur un axe orienté $(\mathrm{O}\,;\vec{i})$, on considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante :
- Les points A_0 et B_0 ont pour abscisses respectives $a_0=1$ et $b_0=7$
- Les points A_n et B_n ont pour abscisses respectives a_n et b_n vérifiant les relations de récurrence :

$$a_{n+1}=\frac{2a_n+b_n}{3} \quad \text{et} \quad b_{n+1}=\frac{a_n+2b_n}{3}$$

1) Placer, sur l'axe, les points A_0 , B_0 , A_1 , B_1 , A_2 et B_2 .

2) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=b_n-a_n$.

a) Démontrer que u_n est une suite géométrique.

b) Exprimer u_n en fonction de n .

c) Que peut-on dire du signe de u_n ? Interpréter géométriquement.

3) a) Démontrer que la suite (a_n) est croissante . Interpréter géométriquement.

b) Démontrer que la suite (b_n) est décroissante . Interpréter géométriquement.

4) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=a_n+b_n$.
a) Montrer que la suite (v_n) est constante.

b) Démontrer que les segments $[A_n B_n]$ ont tous le même milieu que l'on déterminera.

c) Que peut-on conjecturer sur la limite de chacune des suites (a_n) et (b_n) ? Interpréter géométriquement.

5) Expliquer le rôle de cet programme écrit en python.

```
a=1
b=7
i=0
p=float(input("p="))
while b-a>p:
   (a,b)=((2*a+b)/3,(a+2*b)/3)
   i=i+1
print(i)
```

Approfondissement

Ex 8-33 : Suite homographique
Situation 2 : utiliser une suite auxiliaire géométrique

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{4+u_n} \end{cases}$

et la suite (v_n) définie tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+3}$.

1) a) Avec un tableur, on a obtenu le résultat suivant :
Quelles formules ont été saisies dans les cellules B3 et C2 puis tirées vers le bas :

En B3 :

En C2 :

	A	B	C
1	n	un	vn
2	0	0	-0,33333333
3	1	0,75	-0,06666667
4	2	0,947368	-0,01333333
5	3	0,989362	-0,00266667
6	4	0,997868	-0,00053333
7	5	0,999573	-0,00010667
8	6	0,999915	-2,1333E-05
9	7	0,999983	-4,2667E-06
10	8	0,999997	-8,5333E-07
11	9	0,999999	-1,7067E-07

b) Conjecturer la limite de la suite (u_n)

c) En calculant quelques quotients $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, conjecturer la nature de la suite (v_n) .

2) a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant.

b) En déduire la nature de (v_n) , puis une expression de v_n en fonction de n .

c) Exprimer u_n en fonction de v_n .

d) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{3-3\left(\frac{1}{5}\right)^n}{3+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

e) Déterminer en justifiant $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

f) Que peut-on alors dire de la conjecture faite à la question 1) b) ?

<u>Ex 8-34 :</u> Les tours de Hanoï

Les tours de Hanoï sont un jeu constitué de trois piquets et d'un lot de disques de tailles différentes percés au centre.
Au départ, un lot de disque est placé sur un seul piquet .

Les disques sont posés les uns sur les autres du plus grand au plus petit.
Le jeu consiste à déplacer le lot de disques sur un des deux piquets, en déplaçant un seul disque à la fois et en le posant sur un disque de taille plus grande ou sur un piquet vide.
Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre minimal d'étapes pour déplacer n disques .
On appelle A, B et C les trois piquets.

1) Expliquer pourquoi on a $u_1=1$.

2) Pour $n\geqslant 2$, si on a réussi à déplacer les $n-1$ disques les plus petits (en u_{n-1} étapes) du piquet A au piquet B, on déplace le plus grand disque sur le piquet C et il ne reste plus qu'à déplacer les $n-1$ disques les plus petits vers le piquet C.
Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} .

3) On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (v_n) par $v_n = u_n + 1$.

a) Vérifier que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme à déterminer.

b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de v_n en fonction de n , puis celle de u_n .

c) En déduire le nombre minimal d'étapes nécessaires pour déplacer un lot de huit disques.