

SUITES ARITHMÉTIQUES et SUITES GÉOMÉTRIQUES

1) SUITES ARITHMÉTIQUES

A) DÉFINITION PAR RÉCURRENCE

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique**, s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1} = u_n + r$.
Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n) .

r peut-être positif ou négatif.

Exemples :

- La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de raison 1.
- La suite des entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2.
- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 4n + 5$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 5 - (4n + 5) = 4$
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + 4$ et (u_n) est une suite arithmétique de raison 4.

L'astuce :
calculer $u_{n+1} - u_n$

Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $u_n = an + b$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b .

Et la réciproque !!

B) DÉFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 + nr$

Preuve :

Additionnons membre à membre les n égalités ci-dessous:

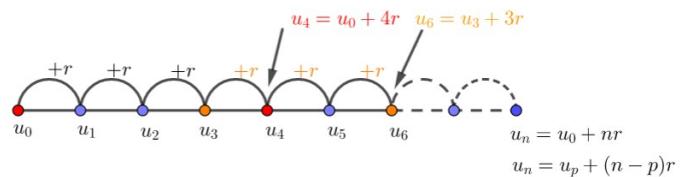
$$\begin{cases} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ \dots \\ u_{n-1} = u_{n-2} + r \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases}$$

On obtient : $u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + nr$

Et après simplification : $u_n = u_0 + nr$

Exemple

Soit (u_n) la suite arithmétique définie par $u_0 = 7$ et $r = 12$, alors $u_6 = 7 + 6 \times 12 = 79$



Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
Pour tous entiers naturels n et p , on a : $u_n = u_p + (n - p)r$

Preuve : (Pour la preuve, on suppose que le premier terme de la suite est u_0)

On a $u_p = u_0 + pr$ et $u_n = u_0 + nr$, donc $u_n - u_p = nr - pr$ et $u_n = u_p + (n - p)r$

Intérêts :

- Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite arithmétique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)
- Cette formule permet aussi de calculer la raison d'une suite arithmétique dont on connaît deux termes.

Exemples :

- Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 4$ et $u_4 = 10$.
On a $u_4 = u_2 + (4 - 2)r \Leftrightarrow 10 = 4 + 2r \Leftrightarrow r = 3$
- Soit (u_n) une suite arithmétique définie par $u_{10} = 30$ et $r = 2$.
On a $u_{20} = u_{10} + (20 - 10)2 = 50$

C) MONOTONIE

Les résultats suivants ne sont pas surprenants :

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.

D) SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Remarque préliminaire :

NOMBRE DE TERMES D'UNE SOMME

$u_1 + u_2$ est une somme de deux termes ; $u_1 + u_2 + u_3$ est une somme de trois termes
De manière générale, $u_1 + u_2 + \dots + u_p$ est une somme de p termes .

Comment faire (*sans compter sur les doigts*) pour calculer le nombre de termes de la somme $u_{12} + u_{13} + \dots + u_{56}$?
On peut écrire $u_{12} + u_{13} + \dots + u_{56} = u_{1+11} + u_{2+11} + \dots + u_{45+11}$
La somme a donc 45 termes, c'est à dire $56 - 12 + 1$

Plus généralement :

Le nombre de termes de la somme $u_p + u_{p+1} + \dots + u_q$ (p, q entiers naturels tels que $p \leq q$) est $q - p + 1$

Étude d'un exemple fondamental : SOMME DES n PREMIERS ENTIERS NATURELS

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n$.
Calculons la somme $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 + 2 + \dots + n$.

On peut écrire :
$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n \\ &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

En additionnant membre à membre, on obtient :

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ fois}} \quad \text{c'est à dire } 2S = n(n+1) \text{ et donc } S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cas général :

En utilisant la même idée,

$$\begin{aligned} S &= a + (a+r) + (a+2r) + \dots + b \\ S &= b + (b-r) + (b-2r) + \dots + a \\ 2S &= (a+b) + (a+b) + (a+b) + \dots + (a+b) \end{aligned}$$

a et b sont les termes extrêmes de S, r est la raison de la suite

On en déduit la formule ci-dessous qui n'est plus au programme, mais qui est encore très utilisée.

Propriété :

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au **produit du nombre de termes par la demi-somme des termes extrêmes**.

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Remarques : Moyenne arithmétique

- Si a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors $b = \frac{a+c}{2}$
- De manière plus générale, si $u_p, u_{p+1}, \dots, u_{p+n}$ sont $n+1$ termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors la moyenne arithmétique de ces termes est la moyenne arithmétique des termes extrêmes : $\frac{u_p + u_{p+n}}{2}$

2) SUITES GÉOMÉTRIQUES

A) DÉFINITION PAR RÉCURRENCE

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique**, s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1} = qu_n$.

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n) .

q peut-être positif ou négatif et non nul (sans intérêt)

Exemples :

- Soit (u_n) , la suite des puissances de 2, définie par $u_n = 2^n$
Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2u_n$
Cette suite est donc une suite géométrique de raison 2.
- Soit (v_n) la suite définie par $v_n = n \times 5^n$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 5 \times \frac{n+1}{n}$, ce qui n'est pas un rapport constant.
La suite (v_n) n'est donc pas une suite géométrique.
(Le calcul des trois premiers termes permet de justifier que la suite n'est pas géométrique)
- Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $w_n = 4 \times 3^n$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = 4 \times 3^{n+1} = 3 \times (4 \times 3^n) = 3 \times w_n$

Cette suite est donc une suite géométrique de raison 3.

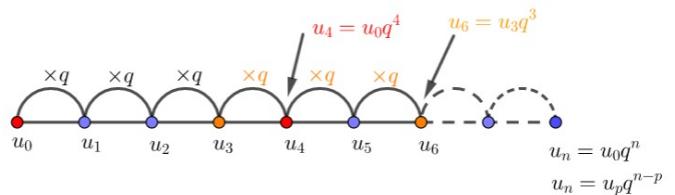
Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $u_n = aq^n$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}^*$) est une suite géométrique de raison q et de premier terme a .

Et la réciproque !!!

B) DÉFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0 q^n$



Preuve :

(u_n) est une suite géométrique, donc $u_1 = u_0 q$.

Puis $u_2 = u_1 q = (u_0 q) q = u_0 q^2$

Et ainsi de proche en proche, car lorsqu'on aura établi que pour l'entier naturel n , $u_n = u_0 q^n$, on en déduira que $u_{n+1} = u_0 q^{n+1}$.

En effet $u_{n+1} = u_n q = u_0 q^n q = u_0 q^{n+1}$

Exemple : Soit u_n la suite géométrique définie par $u_0 = 7$ et $q = 12$, alors $u_3 = 7 \times 12^3 = 12096$

Plus généralement :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q .

Pour tout entier naturel n et p , on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Preuve : (Pour la preuve, on suppose que le premier terme de la suite est u_0)

On a $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_p = u_0 \times q^p$

$$q \neq 0, \text{ donc } \frac{u_n}{u_p} = \frac{q^n}{q^p} = q^{n-p} \text{ et } u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Intérêt : Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)

Exemples :

- Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_{10} = 30$ et $q = 2$.

$$\text{On a } u_{13} = u_{10} \times 2^{13-10} = 30 \times 2^3 = 30 \times 8 = 240$$

- Soit (v_n) une suite géométrique telle que $v_2 = 5$ et $v_8 = 320$.

$$\text{On a } v_8 = v_2 \times q^{8-2}, \text{ donc } 320 = 5 \times q^6 \text{ c'est à dire } q^6 = 64 \\ \text{Il y a donc deux valeurs possibles } q = 2 \text{ ou } q = -2$$

Attention : Cette formule ne permet pas de calculer la raison d'une suite géométrique dont on connaît deux termes.

Remarque : Moyenne géométrique

Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors $b^2 = ac$.

Si trois nombres positifs a , b et c vérifient $b^2 = ac$, on dit que b est la moyenne géométrique de a et c .

C) MONOTONIE

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q (strictement positive) et de terme initial u_0 .

- Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Si $q < 0$ la suite est alternativement positive puis négative ...

Idée de preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$

Ainsi $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times (q^{n+1} - q^n) = q^n \times u_0 \times (q - 1)$
 $q > 0$; on en déduit que le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le signe de $u_0 \times (q - 1)$...

D) SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Étude d'un exemple fondamental : SUITE GÉOMÉTRIQUE DE PREMIER TERME $u_0 = 1$.

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = q^n$ ($q \neq 0$ et $q \neq 1$)

Calculons la somme $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$.

On peut écrire :
$$\begin{aligned} S &= 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n \\ qS &= q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1} \end{aligned}$$

Par soustraction membre à membre, on obtient :

$$S - qS = 1 - q^{n+1} \quad \text{c'est à dire} \quad (1 - q)S = 1 - q^{n+1} \quad \text{et donc} \quad S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Cas général : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q ($q \neq 0$, $q \neq 1$).

Calculons la somme $S = u_4 + u_5 + \dots + u_8$

On a $S = u_4 + qu_4 + q^2 u_4 + q^3 u_4 + q^4 u_4 = u_4(1 + q + q^2 + q^3 + q^4)$

$$\text{Ainsi } S = u_4 \frac{(1 - q^5)}{1 - q}$$

On en déduit la formule ci-dessous qui n'est plus au programme, mais qui est encore très utilisée.

Propriété :

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q , on applique la formule suivante :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

3.) LIMITES DES SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

A) SUITES ARITHMÉTIQUES (évident)

Propriété :

Toute suite arithmétique de raison r non nulle est divergente.

- Si $r > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

B) SUITES GÉOMÉTRIQUES (q^n) (admis)

Propriété :

Soit q un réel.

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors pour tout n , $q^n = 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) est divergente

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 supérieure à 1 ; elle est donc divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Remarque :

On en déduit facilement le cas général $u_0 q^n \dots$

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -5 \times 2^n$.

On a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$