

# SUITES NUMÉRIQUES : GÉNÉRALITÉS

## 1) DÉFINITION et NOTATIONS

### Définition :

On appelle **suite numérique**, toute application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Une suite se note  $u$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(u_n)_{n \geq 0}$  ou  $(u_n)$ , qui est la notation la plus utilisée.

On note  $u_n$  l'**image** de l'entier naturel  $n$ . (plutôt que  $u(n) \dots$ )

On dit que  $u_n$  est le **terme général** de la suite  $(u_n)$ , le **terme de rang**  $n$  ou le **terme d'indice**  $n$ .

$u_0$  est le **terme initial** de la suite  $(u_n)$ .

- $(u_n)$  désigne une suite.
- $u_n$  désigne un nombre.

### Comment présenter une suite :

- On peut présenter une suite sous forme de liste : « on considère la suite  $(1, 2^2, 3^2, \dots, n^2)$  »
- Le plus souvent, on la présente par son terme général : « soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = n^2$  »

### Exemples :

- Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = 3 \times n + 10$   
Le terme d'indice 2 est  $u_2 = 16$ , le terme d'indice 10 est  $u_{10} = 40$ , le terme d'indice 2  $n$  est  $u_{2n} = 6n + 10 \dots$
- La suite des nombres impairs a pour terme général  $u_n = 2 \times n + 1$ .

### Complément :

Une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang  $n_0$ ; on la note parfois  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et son **terme initial** est  $u_{n_0}$ .

- La suite de terme général  $u_n = \sqrt{n} - 4$ , n'est définie que pour  $n \geq 4$ , on la note  $(u_n)_{n \geq 4}$
- La suite de terme général  $u_n = \frac{1}{n}$ , n'est définie que pour  $n \geq 1$ , on la note  $(u_n)_{n \geq 1}$

**Remarque :** Comme pour les fonctions, on omet souvent de préciser l'ensemble de définition ... attention.

## 2) DIFFÉRENTES FAÇONS DE DÉFINIR UNE SUITE ...

### A) PAR UNE FORMULE EXPLICITE

On peut définir une suite par une **formule explicite**, qui permet de calculer directement à partir de  $n$  le terme d'indice  $n$ .

### Exemples :

- La suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 5^n$
- La suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = 3n^2 + 5$

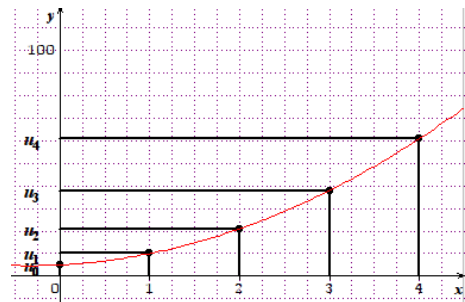
### Cas particulier important :

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[0; +\infty[$  (au moins).

On définit une suite  $(u_n)$  en posant, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = f(n)$ .

On dispose alors, à partir de la courbe représentative de la fonction  $f$ , d'une représentation graphique de la suite  $(u_n)$ .

Sur l'axe des ordonnées, on peut lire les termes  $u_0, u_1, u_2, \dots$



### Exemple :

Soit  $f$  la fonction définie sur par  $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$  et  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = f(n)$ .

Ainsi pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n = 3n^2 + 2n + 5$ .

Pour calculer le terme d'indice  $n$ , il suffit de chercher l'image de  $n$  par  $f$ .

On en déduit que :  $u_0 = 5, u_1 = 10, u_2 = 21, \dots, u_{n+1} = 3(n+1)^2 + 2(n+1) + 5 = 3n^2 + 8n + 10$

### B) PAR RÉCURRENCE

On donne  $u_0 = 0$  et on considère la relation  $u_{n+1} = 2u_n + 3$ .

Ceci nous permet de calculer de **proche en proche** tous les termes de la suite  $(u_n)$ .

En effet :

$$u_1 = 2u_0 + 3 = 2 \times 0 + 3 = 3$$

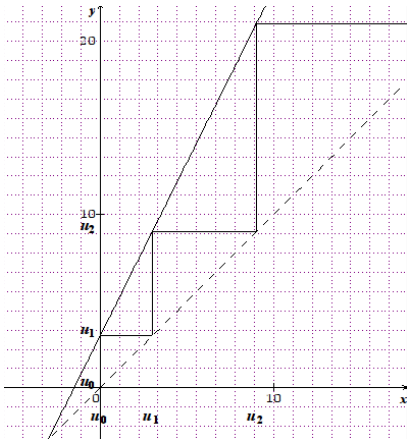
$$u_2 = 2u_1 + 3 = 2 \times 3 + 3 = 9$$

$$u_3 = 2u_2 + 3 = 2 \times 9 + 3 = 21 \dots$$

Si l'on considère la fonction  $f$  définie sur par  $f(x) = 2x + 3$ , alors on peut dire que la suite  $(u_n)$  est définie par la donnée de  $u_0 = 0$  et par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ . (cette relation est appelée **relation de récurrence**)

De manière plus générale :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ , telle que, pour tout réel  $x \in I$ ,  $f(x) \in I$  ( $f(I) \subset I$ )  
 On peut alors définir une suite  $(u_n)$  par la donnée de  $u_0$  ( $u_0 \in I$ ), et de **la relation de récurrence**  $u_{n+1} = f(u_n)$ .



En utilisant la courbe représentative de la fonction  $f$  et la droite d'équation  $y = x$ , on dispose alors, d'une représentation graphique de la suite  $(u_n)$ .  
 On peut lire les termes  $u_0, u_1, u_2, \dots$  sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

*Dans la plupart des cas, par manque de place ou de lisibilité, on ne peut représenter que les premiers termes de la suite.*

#### Remarques :

- La donnée de  $u_0$  et d'une relation  $u_{n+1} = f(u_n)$  ne permet pas toujours de définir une suite.
- La remarque « ...  $f(x)$  est aussi dans  $I$  ... » est importante.

#### Exemple :

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{2}{2-x}$ .  
 Si  $u_0 = 1$ , alors  $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2$ .  
 Or  $f$  n'est pas définie en 2, donc  $u_2 = f(u_1)$  n'est pas défini ...

Chaque terme étant défini à partir du précédent, pour connaître le terme d'indice  $n$ , il faut d'abord calculer les  $n-1$  termes qui le précèdent ...

- Éviter la confusion entre les suites que l'on peut définir, avec la même fonction, par une formule explicite ou par récurrence.  
 Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 3x$ , alors :  
 « **EXPLICITE** » :  $u_0 = f(0) = 0$ ,  $u_1 = f(1) = 3$ ,  $u_2 = f(2) = 6$  ...  
 « **RECURRENCE** avec  $u_0 = 1$  » :  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = f(u_0) = 3$ ,  $u_2 = f(u_1) = 9$  ...

### 3 ) SUITES CROISSANTES, SUITES DÉCROISSANTES

Les suites sont des fonctions particulières ... il n'est donc pas étonnant de retrouver des définitions, déjà vues pour les fonctions, ...

#### Définition :

- Une suite  $(u_n)$  est **croissante** si, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$   
 $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \dots$
- Une suite  $(u_n)$  est **décroissante** si, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \geq u_{n+1}$ .  
 $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \dots$
- Une suite  $(u_n)$  est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

*On définit de même ces notions **strictement**.*

#### Remarques :

- Si pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = u_{n+1}$ , on dit que la suite est **constante**.
- S'il existe un entier naturel  $p$  tel que, pour tout entier  $n \geq p$ , on ait  $u_n \leq u_{n+1}$ , on dit que la suite est croissante à partir du rang  $p$ . ( de même pour les autres notions vues ci-dessus )
- Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes ... ( exemple : la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n$  )

#### Comment fait-on dans la pratique ?

- On étudie le signe de la **différence**  $u_{n+1} - u_n$
- **ou**, si la suite est à termes strictement positifs ( ou strictement négatifs ), on compare le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1.

#### Exemples :

- Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = n^2 - n - 2$ .  
 Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  
 $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - 2 - (n^2 - n - 2) = \dots = 2n$   
 Ainsi,  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ , c'est à dire  $u_{n+1} \geq u_n$  ; la suite  $(u_n)$  est donc croissante.

et pourtant la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^2 - x - 2$  n'est pas croissante sur  $\mathbb{R}$

- Soit la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = \frac{n}{2^n}$  ( $n \geq 1$ )

Pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2n} ; \text{ de plus } n \geq 1, \text{ donc } n+1 \leq 2n, \text{ et } \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1.$$

Or  $v_n > 0$ , donc  $v_{n+1} \leq v_n$ ; la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est donc décroissante.

#### 4) SUITES BORNÉES

##### Définition :

- Une suite  $(u_n)$  est **majorée** s'il existe un réel  $M$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on ait  $u_n \leq M$ .
- Une suite  $(u_n)$  est **minorée** s'il existe un réel  $m$  tel que pour tout entier naturel  $n$ , on ait  $u_n \geq m$ .
- Une suite  $(u_n)$  est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Comme pour les fonctions, on dit que  $M$  (respectivement  $m$ ) est **un majorant** (respectivement **minorant**) de la suite.

##### Exemples :

- Une suite croissante est minorée par son terme initial ; une suite décroissante est majorée par son terme initial.
- Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ .

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \text{ on a } -1 \leq (-1)^n \leq 1 \text{ et } 0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1 ; \text{ donc } -1 \leq u_n \leq 2$$

La suite  $(u_n)$  est donc bornée.

##### Remarque :

S'il existe un entier naturel  $p$  tel que, pour tout entier  $n \geq p$ , on ait  $u_n \leq M$ , on dit que la suite est majorée par  $M$  à partir du rang  $p$ .  
(de même pour les autres notions vues ci-dessus)

#### 5) LE COTÉ AGRÉABLE DES SUITES $u_n = f(n)$

Si une suite est de la forme  $u_n = f(n)$ , on déduit rapidement, à partir des propriétés de la fonction  $f$ , des résultats sur la suite.

On montre facilement que :

- Si  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ , alors  $(u_n)$  est croissante.
- Si  $f$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$ , alors  $(u_n)$  est décroissante.
- Si  $f$  est majorée sur  $[0; +\infty[$ , alors  $(u_n)$  est majorée.
- Si  $f$  est minorée sur  $[0; +\infty[$ , alors  $(u_n)$  est minorée.

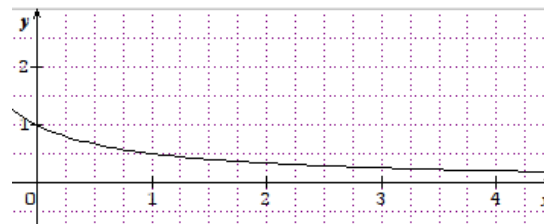
Les réciproques sont fausses

##### Exemple :

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \frac{1}{n+1}$  et la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ .

$f$  est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$  et pour tout réel  $x \in [0; +\infty[$ , on a  $0 \leq f(x) \leq 1$ .

On en déduit que  $(u_n)$  est aussi décroissante et bornée.



#### 6) LIMITE D'UNE SUITE

Soit une suite  $(u_n)$ .

##### cas 1

Intuitivement, si «  $u_n$  est aussi grand que l'on veut dès que  $n$  est assez grand », alors on dit que la suite  $(u_n)$  a pour limite  $+\infty$ .

On note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

##### De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme  $]A; +\infty[$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.

**Exemple :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

##### cas 2

Intuitivement, si les termes  $u_n$  finissent par être négatifs et « si  $u_n$  est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que  $n$  est assez grand », alors on dit que la suite  $(u_n)$  a pour limite  $-\infty$ .

On note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

##### De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme  $]-\infty; A[$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.

**Exemple :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^2 = -\infty$

**Remarque :**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$$

**cas 3** (suite convergente)

Soit  $L$  un réel donné.

Intuitivement, dire que  $(u_n)$  a pour limite  $L$ , signifie que lorsque  $n$  est de plus en plus grand, « **les nombres  $u_n$  correspondants viennent s'accumuler autour de  $L$**  ».

On note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

**De manière plus mathématique :**

Tout intervalle ouvert contenant  $L$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.

**Exemple :**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

**Remarque :**

Si une suite  $(u_n)$  a une limite finie  $L$ , alors la limite  $L$  est unique.

**cas 4**

Aucun des trois cas ne se produit.

**Exemple :**

La suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n$  prend successivement les valeurs 1 et -1.

Ainsi  $(u_n)$  n'a pas pour limite  $+\infty$ , n'a pas pour limite  $-\infty$  et n'a pas pour limite un réel.

**Remarque :** Une suite qui ne converge pas est **divergente**. ([cas 1](#) , [cas 2](#) , [cas 4](#))