

Ex 6-1 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

1) Si une fonction f est décroissante sur \mathbb{R} , alors f est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est négative.

2) Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée est nulle, alors f est constante.

3) Si f est une fonction dérivable en a telle que $f'(a)=0$, alors f admet un maximum local en a .

4) Une fonction f admet un maximum local en 3 sur $[1;4]$ s'il existe un intervalle ouvert $]a;b[$ inclus dans $[1;4]$ et contenant 3 tel que pour tout x appartenant à $]a;b[$, on a $f(x) \leq f(3)$.

5) Si une fonction f admet un maximum local en a , alors f est dérivable en a .

2) $f : x \mapsto \sqrt{x}(x+3)$, $I = \mathbb{R}^+$

Ex 6-2 : Variations : plusieurs méthodes

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier les variations de f sur I en utilisant la définition d'une fonction croissante/décroissante ou d'autres propriétés, puis vérifier le résultat grâce à la dérivée.

1) $f : x \mapsto -x^4 - x^2$, $I = \mathbb{R}^+$

3) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I = \mathbb{R}_+^*$

4) $f : x \mapsto |x-1|$, $I = \mathbb{R}$

Ex 3 : Déterminer les variations d'une fonction

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier les variations de f sur l'ensemble I indiqué, puis déterminer les éventuels extrema de f .

1) $f : x \mapsto 2x^4 - 1$, $I = \mathbb{R}$

2) $f : x \mapsto \frac{2x^3}{3} + 3x^2 - 56x + 17$, $I = \mathbb{R}$

3) $f : x \mapsto \frac{x^4}{4} - \frac{11}{3}x^3 + 9x^2 - 5$, $I = \mathbb{R}$

4) $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$, $I = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$$5) f: x \mapsto x + \frac{3}{x}, \quad I = \mathbb{R}^*$$

$$7) f: x \mapsto \frac{x^2 + 3x}{x+1}, \quad I = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

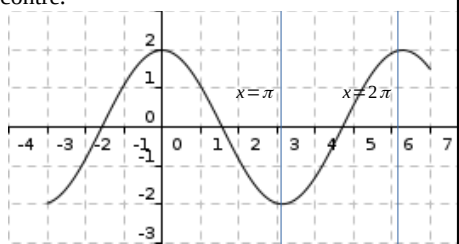
$$6) f: x \mapsto \frac{x-1}{2-x}, \quad I = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$8) f: x \mapsto x\sqrt{x} - x, \quad I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$$

Ex 6-4 : À partir d'une courbe

On considère une fonction f dérivable sur $I = [-3; 7]$ dont la courbe représentative est donnée ci-contre.

1) Déterminer les variations de f sur I , ainsi que le signe de sa dérivée.



2) Déterminer tous les extrema locaux de f .

$$2) \ x^2 \geq x\sqrt{x} - \frac{1}{2}, \ I =]0; 4]$$

Ex 6-5 : Montrer des inégalités

Démontrer, à l'aide d'une étude de fonction, chacune des inégalités proposées sur l'intervalle I .

$$1) \ \frac{1}{1-x} \leq x-3, \ I = [2; +\infty[$$

Aide : faire le tableau de variation sur I de $d : x \mapsto \frac{1}{1-x} - (x-3)$

$$3) \frac{\sqrt{x}}{1+x} \leq \frac{1}{2}, \quad I=[0;2]$$

Retrouver ce résultat en développant $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

Ex 6-6 : Trouver une fonction vérifiant des conditions

Dans chacun des cas suivants, donner un exemple d'une fonction (ou d'un représentation graphique de fonction) vérifiant la ou les conditions(s) proposée(s) :

1) f est dérivable sur \mathbb{R} , et sa fonction dérivée est négative sur \mathbb{R} .

2) f est définie sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R}^* , décroissante sur \mathbb{R}^- et croissante sur \mathbb{R}^+ .

3) f est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* , et sa dérivée est positive sur \mathbb{R}^* .

$$4) x + \frac{1}{x} \geq 2, \quad I = \mathbb{R}_+^*$$

4) f est définie sur \mathbb{R}^+ , dérivable uniquement sur \mathbb{R}_+^* , et sa fonction dérivée est positive sur \mathbb{R}_+^* .

5) f est dérivable sur \mathbb{R} et admet un maximum local en 4.

6) f est dérivable sur \mathbb{R}^+ , sa fonction dérivée est positive sur \mathbb{R}^+ et s'annule en 0.

2) Déterminer le maximum et le minimum de $f(x)$ sur $\left[-\frac{5}{2}; 3\right]$

En déduire le meilleur encadrement possible de $f(x)$ sur $\left[-\frac{5}{2}; 3\right]$

3) Déterminer le meilleur encadrement possible de $|f(x)|$ sur $\left[-\frac{5}{2}; 3\right]$

Ex 6-7 : Encadrement

Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{5}{2}; 3\right]$ par $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 - 3$.

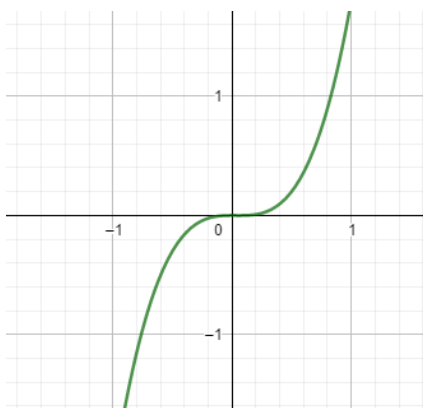
1) Étudier les variations de f (faire un tableau de variation)

Ex 6-8 : Attention à la représentation graphique

Zineb a représenté à l'aide de GeoGebra la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^3 - 0,2x^2$.

Elle affirme que la fonction est strictement croissante sur \mathbb{R} .

A-t-elle raison ?

**Ex 6-9 : Trinôme du second degré**

1) Démontrer en utilisant la dérivation le résultat déjà vu sur les variations d'un trinôme du second degré $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

2) Compléter le programme écrit en python ci-dessous qui, à partir des valeurs connues a , b et c , indique la valeur de l'extremum de la fonction f sur \mathbb{R} en précisant s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, ainsi que la valeur en laquelle il est atteint.

```

1 a=float(input("a="))
2 b=float(input("b="))
3 c=float(input("c="))
4 if (.....):
5     print("a ne peut pas être nul")
6 else:
7     m=.....
8     M=.....
9     if (.....):
10        print("f admet pour minimum",M,"atteint en",m)
11    else:
12        print("f admet pour maximum",M,"atteint en",m)

```



Ex 6-10 : Position relative d'une courbe et d'une tangente en un point

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 2x$

1) Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f .

2) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f représentative de f au point A d'abscisse 1.

3) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x - 2$.

a) Montrer que $f(x) - g(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$

b) Étudier le signe de $h(x) = f(x) - g(x)$.

c) En déduire la position relative de C_f par rapport à T .

Ex 6-11 : Position relative de deux courbes

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + 3x + 1$ et g la fonction

définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $g(x) = -\frac{1}{x+2}$.

On note C_f et C_g les courbes représentatives respectives des fonctions f et g .

1) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.

2) Étudier les variations de la fonction g et dresser son tableau de variations.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

a) Développer $(x+1)^2(x+3)$

b) Étudier le signe de $h(x)$.

c) Déterminer la position relative de C_f par rapport à C_g .

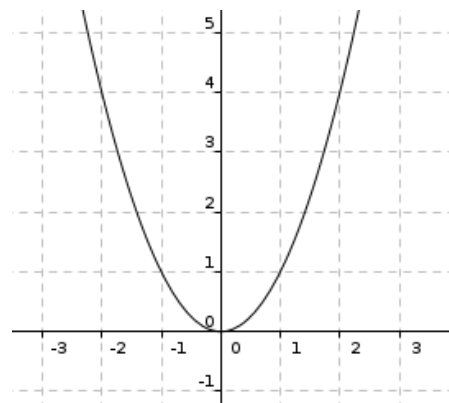
4) Démontrer que C_f et C_g admettent une tangente commune en un de leurs points d'intersection . Donner une équation de cette tangente.

Ex 6-12 : Étude de fonctions convexes

1) Soit $f : x \mapsto x^2$ et C_f sa courbe représentative donnée ci-dessous :

Tracer les tangentes à C_f aux points d'abscisses -2, -1, 0, 1 et 2.

Quelle semble être la position de chacune de ces tangentes par rapport à C_f .



2) Soit a un réel . Déterminer l'équation $y = g_a(x)$ de la tangente à C_f au point d'abscisse a .

Démontrer alors que, pour tout réel x , on a $f(x) \geq g_a(x)$.

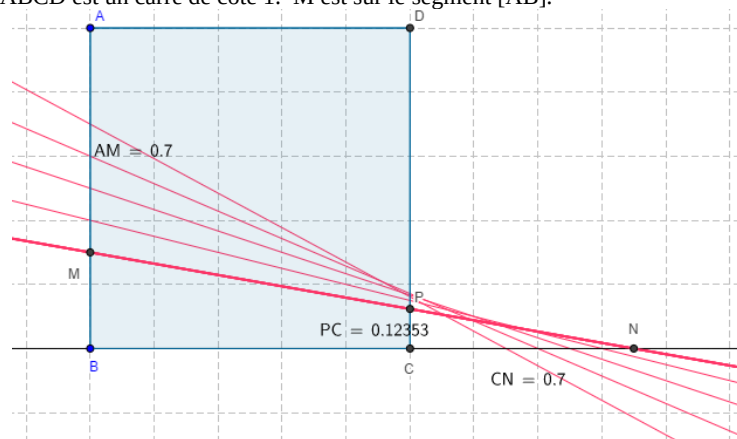
Une telle fonction est dite convexe.

3) La fonction inverse est-elle convexe sur $] -\infty; 0[$?
Démontrer en revanche qu'elle l'est sur $] 0; +\infty[$

Problèmes d'optimisation

Ex 6- 13 : Distance maximale

ABCD est un carré de côté 1. M est sur le segment [AB].



On place le point N tel que $CN=AM$ sur la demi droite [BC) à l'extérieur du segment [BC].

La droite (MN) coupe (DC) en P . On pose $AM=x$ avec $0 \leq x \leq 1$.

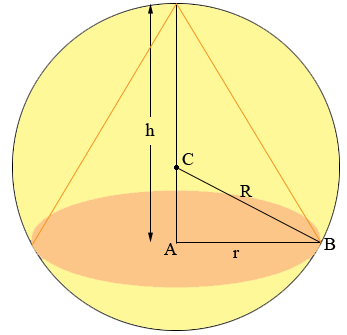
Le but de l'exercice est de trouver M sur [AB] tel que la distance PC soit maximale.

1) Démontrer que $PC = \frac{x - x^2}{1 + x}$

Ex 6- 14 : Cône : volume maximal

Dans une sphère de centre C et de rayon R, on inscrit un cône de révolution de hauteur h .

1) Démontrer que le rayon r de la base du cône est égal à $\sqrt{h(2R-h)}$



2) a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0;1]$ par

$$f(x) = \frac{x - x^2}{1 + x}$$

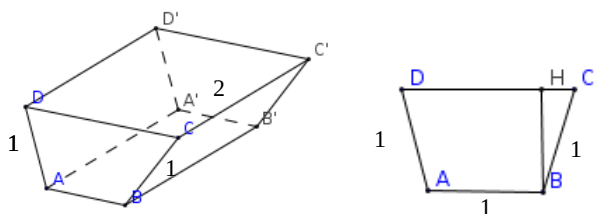
2) a) Calculer le volume du cône en fonction de h .

b) Pour quelle valeur de h le volume est-il maximal ?

b) En déduire la valeur de x pour laquelle la distance PC est maximale.

Ex 6- 15 : Prisme : volume maximal

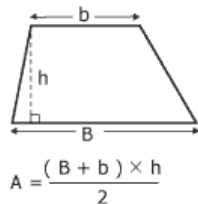
Une benne à la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle ABCD.



La longueur du côté CD est variable.

Les autres dimensions sont fixes. On désigne par x la longueur CH où H est le projeté orthogonal de B sur (CD). On se propose de déterminer x de façon que la benne ait un volume maximal.

- 1) Calculer en fonction de x l'aire $S(x)$ du trapèze isocèle ABCD, puis le volume $V(x)$ de la benne.



- 2) Démontrer que $S'(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$S'(x) = \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Utiliser la formule qui sera vue en terminale : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ où u est une fonction.

- 3) Étudier le sens de variation de S puis de V .

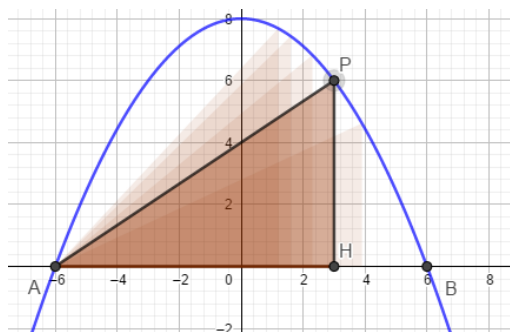
- 4) Pour quelle valeur de x le volume de la benne est-il maximal ?

- 5) Quel est alors le volume de la benne et quelle est la mesure en degrés de l'angle \widehat{CBH} ?

Ex 6- 16 : Parabole et aire maximale

La parabole d'équation $y = -\frac{2}{9}x^2 + 8$ coupe l'axe des abscisses en A et B.

Le point $P(x; y)$ se déplace sur la parabole entre A et B.



Le but du problème est de déterminer les coordonnées du point P pour que l'aire du triangle rectangle AHP soit maximale.

1) Déterminer les coordonnées des points A et B.

2) On note $f(x)$, l'aire du triangle en fonction de x .

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

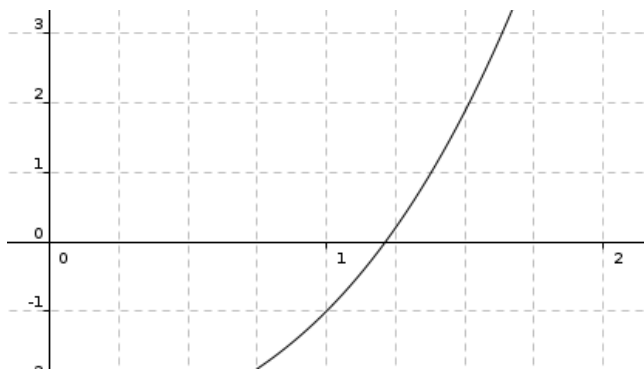
b) Montrer que $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 4x + 24$

3) Étudier les variations de f .

4) Répondre au problème posé.

Algorithme – Python**Ex 6-17 : Méthode de Newton-Raphson****1) Introduction :**

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 3$ et sa courbe représentative C_f représentée ci-dessous.



On constate que C_f coupe l'axe des abscisses en un unique point d'abscisse α dont nous allons déterminer une valeur approchée.

a) Tracer la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse $x_0 = \frac{3}{2}$.

T_{x_0} coupe l'axe des abscisses en un unique point A.

Déterminer l'abscisse x_1 de A.

b) Tracer la tangente T_{x_1} à C_f au point d'abscisse x_1 . T_{x_1} coupe l'axe des abscisses en un unique point B d'abscisse x_2 . Que dire de x_2 ?

2) Mise en place de l'algorithme :

Revenons sur le cas général. Soit f une fonction dont la dérivée est strictement positive sur \mathbb{R} et telle que $f(x) = 0$ admette une unique solution α . On note C_f sa courbe représentative. Soit x_0 un réel supérieur à α .

a) Déterminer l'équation de la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse x_0 .

b) Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection A_1 de T_{x_0} avec

l'axe des abscisses vaut $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. On peut alors répéter ce

procédé en remplaçant x_0 par la nouvelle abscisse x_1 , et ainsi obtenir des réels x_1, x_2, x_3, \dots de plus en plus proche de α .

c) On s'intéresse à nouveau à la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x - 3$. Compléter les pointillés dans le programme suivant écrit en Python pour qu'il affiche les valeurs x_1, \dots, x_{10} .

(A faire pour un polynôme de degré 3 quelconque)

```

1  def f(a,b,c,d,x):
2      return .....
3
4  def der_f(a,b,c,x):
5      return .....
6
7  a=float(input("a="))
8  b=float(input("b="))
9  c=float(input("c="))
10 d=float(input("d="))
11 x=float(input("x="))
12 for i in range(1,.....):
13     x=.....
14     print(x)

```

d) On se propose maintenant de trouver un réel x tel que $|f'(x)| < 10^{-p}$ et en insérant un compteur.

Pour cela, compléter les pointillés dans le programme ci-dessous :

```

1  def f(a,b,c,d,x):
2      return a*x**3+b*x**2+c*x+d
3
4  def der_f(a,b,c,x):
5      return 3*a*x**2+2*b*x+c
6
7  a=float(input("a="))
8  b=float(input("b="))
9  c=float(input("c="))
10 d=float(input("d="))
11 x=float(input("x="))
12 p=int(input("p="))
13 nb_etape= .....
14 while .....:
15     x=x-f(a,b,c,d,x)/der_f(a,b,c,x)
16     nb_etape= .....
17 print(x,"en",nb_etape,"étapes")

```

3) Application :

Étudier la fonction $g : x \mapsto x^3 - x^2 + 2x$, vérifier que sa fonction dérivée est strictement positive, puis que l'équation $g'(x) = 1$ admet une unique solution α .

En utilisant le second programme, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.