Normes, projections orthogonales

Ex 5-1 : Vrai ou faux - restituer les notions du cours

1) $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{BA}\|$

2) $\|-5\vec{u}\|=-5\|\vec{u}\|$

3) Si $\|\vec{u}\|=3$ et $\|\vec{v}\|=4$, alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|=7$

4) Si I est le milieu de [AB], alors $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\overrightarrow{AI}\|+\|\overrightarrow{IB}\|$

5) Si A, B et C sont trois points alignés, alors $\|\overrightarrow{AC}\|=\|\overrightarrow{AB}\|+\|\overrightarrow{BC}\|$

6) Si les projections orthogonales de deux vecteurs sont égales, alors ces deux vecteurs sont égaux.

7) Si $\overrightarrow{AB}$ a pour projeté orthogonale $\overrightarrow{A'B'}$ sur une droite d , alors ABB'A' est un parallélogramme.

8) Si ABCD est un parallélogramme, alors le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AB}$ sur une droite d est égal au projeté orthogonal de $\overrightarrow{DC}$ sur d .

9) Si $\vec{u'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur une droite d , alors $\|\vec{u'}\|\leqslant\|\vec{u}\|$

10) Si $\vec{u'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur une droite d , alors $3\vec{u'}$ est le projeté orthogonal de $3\vec{u}$ sur d .

Ex 5-2 : Normes

Soit un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Dans chacun des cas suivants, calculer la norme du vecteur $\vec{u}$ ou du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

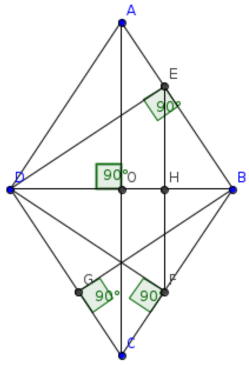
1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-5\\\sqrt{3}+5\end{pmatrix}$

3) $A\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$

Ex 5-3 : Projection orthogonale

ABCD est un losange de centre O.
ABD est un triangle équilatéral. Déterminer les projections orthogonales suivantes :



1) $\overrightarrow{AB}$ sur (BD) :

2) $\overrightarrow{AD}$ sur (DE) :

3) $\overrightarrow{AD}$ sur (DF) :

4) $\overrightarrow{DE}$ sur (DB) :

5) $\overrightarrow{DE}$ sur (BG) :

6) $\overrightarrow{EF}$ sur (AC) :

Les différentes expressions du produit scalaire

Ex 5-4 : Vrai ou faux - restituer les notions du cours

1) Si $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=12$ et $\cos(\alpha)=\frac{1}{3}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=20$
(où α représente l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$)

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA}$

Pour les questions 3 , 4 et 5, on considère que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{GH}$

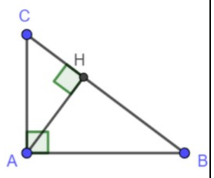
4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{CD}$

5) $\overrightarrow{AA}\cdot\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

6) Si les points A, B et C sont alignés, alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC$

Pour les dernières questions, on considère un triangle ABC rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.

7) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ 8) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$



9) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}>0$ 10) $\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{CA}>0$

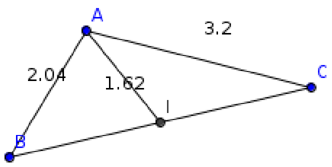
11) $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=-\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{HC}$

12) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 13) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=AB^2$

<u>Ex 5-5 :</u> Choisir la méthode la plus adaptée

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

1) $AB=4$, $AC=5$ et $\widehat{BAC}=45°$



2) AB=2 , AC=7 et $\widehat{BAC}=\frac{5\pi}{6}$

3) Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on a A(2;3) , B(-4;5)

et C(-5;-7)

4) ABCD est un losange dont la longueur des côtés vaut 4 et tel que $\widehat{ADC}=\frac{\pi}{6}$. On donnera une approximation à 10^{-2} près.

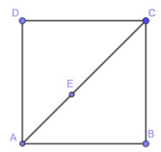
5) I est le milieu de [BC] .

<u>Ex 5-6 :</u> *Choisir la méthode la plus adaptée*

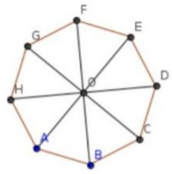
Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1) Soit ABCD un carré de côté 4 et E, le point du segment [AC] tel que AE=0,4AC.

Calculer $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$



2) On considère l'octogone ci-contre avec HD=8.
Calculer :



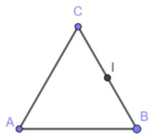
$\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OG}$

$\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FD}$

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{FB} \cdot \overrightarrow{FA}$

3) ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm.



I est le milieu de [BC].

Calculer :

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI}$

$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AI}$

Calculer un angle ou une longueur avec le produit scalaire

Ex 5-7 : Déterminer un angle

1) Dans chacun des cas calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) En déduire $\widehat{BAC}$

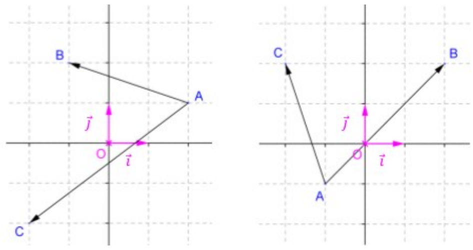
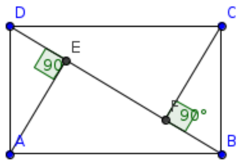


figure 1 :

figure 2 :

Ex 5-8 : Déterminer une longueur

On considère un rectangle ABCD tel que AB=5 et AD=3.
Les points E et F sont les projetés orthogonaux des points A et C sur la droites (BD).
En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{DB}$, déterminer la valeur exacte de la longueur EF.



Ex 5-9 : Déterminer l'angle au sommet d'un triangle isocèle

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(-3;2), B(-1;5) et C(1;2).
Montrer que le triangle ABC est isocèle et donner une mesure de son angle au sommet en degré à 10^{-1} près.

Propriétés – Opérations vectorielles

Ex 5-10 : Vrai ou faux - restituer les notions du cours

1) Si $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{t}$, alors $\vec{v}=\vec{t}$

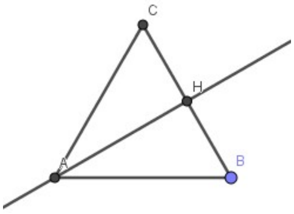
2) Si $\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2$, alors $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$

3) Si $\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2$, alors $\vec{u}=\vec{v}$ ou $\vec{u}=-\vec{v}$

4) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $4\vec{u}$ et $-5\vec{v}$ sont orthogonaux.

5) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$

Pour les dernières questions, on considère un triangle équilatéral ABC et H le pied de la hauteur issue de A.



6) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AH^2$

7) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0{,}5\,AB^2$

8) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}=0{,}75\,AB^2$

Ex 5-11 : Quelques calculs

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u}.\vec{v}=8$
Calculer :

1) $\vec{u}.(3\vec{u}-2\vec{v})$

2) $(\vec{u}-5\vec{v}).(3\vec{u}-2\vec{v})$

3) $(\vec{u}-3\vec{v})^2$

4) $\|\vec{u}+\vec{v}\|$

5) $\|\vec{u}-\vec{v}\|$

6) $\|2\vec{u}-5\vec{v}\|$

Ex 5-12 : Avec les normes

1) Existe-t-il deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}<0$$

2) Montrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$

3) Peut-on déterminer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$$

<u>Ex 5-13 :</u> Relation de Chasles et linéarité

Soit 4 points A, B , C et D tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=4$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3$.
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

<u>Orthogonalité et alignement</u>

<u>Ex 5-14 :</u> Vecteurs orthogonaux ?

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Dans chacun des cas, dire si les vecteurs sont orthogonaux :

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}4876\\-4898873\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}317019173\\315539\end{pmatrix}$

2) $\vec{r}\begin{pmatrix}18^{497}\\17^{254}\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}18^{217}\\-17^{460}\end{pmatrix}$

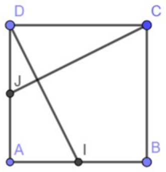
3) $\vec{w}\begin{pmatrix}18^{497}\\306^{43}\end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix}-17^{497}\\306^{454}\end{pmatrix}$

<u>Ex 5-15 :</u> Triangle rectangle

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On donne $M(2;\lambda)$, $A(1;3)$ et $L(4;3-\lambda)$.
Déterminer le(s) réel(s) λ tel que le triangle MAL soit rectangle en A.

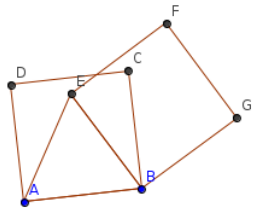
Ex 5-16 : Démontrer que des droites sont perpendiculaires

Soit ABCD un carré de côté a , I le milieu de [AB] et J le milieu de [AD].
Démontrer que les droites (CJ) et (DI) sont perpendiculaires.



Ex 5-17 : Démontrer que des points sont alignés

Soit ABE un triangle équilatéral de côté a , le carré ABCD contenant E et le carré EBGF contenant C.



1) Exprimer $\overrightarrow{BC} . \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{EA} . \overrightarrow{EB}$ en fonction de a .

2) Montrer que BCG est un triangle équilatéral.

3) Exprimer $\overrightarrow{BC} . \overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{DA} . \overrightarrow{EF}$ en fonction de a .

4) Exprimer $\overrightarrow{AE} . \overrightarrow{EF}$ en fonction de a .

5) En déduire la valeur de $\vec{DE} \cdot \vec{BF}$.

6) Démontrer que les point D, E et G sont alignés.

Ex 5-18 : Caractériser un quadrilatère

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a .

D et E sont les points tels que $\vec{AD}=\frac{3}{2}\vec{BC}$ et $\vec{BE}=\frac{1}{4}\vec{AC}$.

1) Exprimer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ en fonction de a .

2) Exprimer $\vec{DE}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

3) Démontrer que les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires.

4) On note H le point d'intersection des droites (AC) et (DE).
Exprimer $\vec{AD} \cdot \vec{AC}$ en fonction de a , puis déterminer la distance AH.

5) En déduire la nature du quadrilatère EBHC.

Ex 5-19 : Dans un parallélogramme – Théorème d'Al Kashi

Soit ABCD un parallélogramme de centre I tel que AB=6, AD=4 et $\widehat{\mathrm{BAD}}=60°$.

1) Calculer $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})^2$ et $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})^2$. En déduire AC et BD.

2) À l'aide du théorème d'Al Kashi, retrouver la distance BD.

Ex 5-20 : Théorème de la médiane

Soit un triangle ABC . On note I le milieu de [BC].

Montrer que $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\ \mathrm{AI}^2+\dfrac{\mathrm{BC}^2}{2}$

Ex 5-21 : Théorème de la médiane et théorème d'Al Kashi

On souhaite construire un parallélogramme ABCD dont on connaît les longueurs des diagonales et un angle :

AC=7 , $\mathrm{BD}=\sqrt{19}$ et $\mathrm{BAD}=60°$.
On pose $x=\mathrm{AB}$ et $y=\mathrm{AD}$.

1) A l'aide du théorème de la médiane, démontrer que $x^2+y^2=34$.

2) En utilisant l'angle $\widehat{BAD}$, démontrer que $x^2+y^2-xy=19$.

3) En déduire les dimensions du parallélogramme ABCD et le construire.

Ensembles de points

Ex 5-22 : Conjecture avec GeoGebra : $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AM}=k$

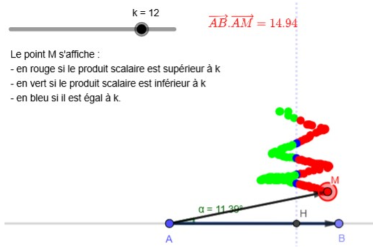
Soit A et B deux points tels que AB=4 cm . On cherche l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AM}=k$, $(k\in\mathbb{R})$.

1) Dans GeoGebra, placer deux points A et B tels que AB=4.

2) Créer un point libre M puis une expression « ps » permettant de calculer
le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AM}$. (Utiliser la formule avec les normes et les angles)

3) Créer un curseur « k » variant de -20 à 20, puis définir un affichage conditionnel de M en rouge lorsque ps>k, en vert lorsque ps<k et en bleu lorsque ps=k.

(Clic droit sur le point>propriétés>avancé>couleurs dynamique)



4) Choisir k=12, puis activer la trace de M et balayer la zone de construction jusqu'à pouvoir conjecturer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AM}=12$.
Démontrer cette conjecture.

5) **Régionnement du plan :**

Déterminer l’ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} \geqslant 12$

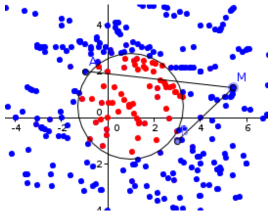
6) Déterminer l’ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-6$

Ex 5-23 : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k$

Soit les points A(-1;2) et B(3;-1).

1) Déterminer l'ensemble F_1 des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-1$

Introduire le milieu I de [AB].



2) Déterminer l’ensemble F_2 des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-\frac{25}{4}$$

3) Déterminer l'ensemble F_3 des points M du plan tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -\frac{27}{4}$$

4) Déterminer l'ensemble F_4 des points M tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \leqslant -1$$

<u>Ex 5-24 :</u> $\mathbf{MA^2+MB^2=}\boldsymbol{k}$

Soit A et B deux points distincts du plan, I le milieu du segment [AB] et k un nombre réel.

1) Pour tout point M du plan, montrer que :

$$MA^2+MB^2=k \quad \Leftrightarrow \quad MI^2=\frac{1}{2}\left(k-\frac{AB^2}{2}\right)$$

2) En raisonnant par disjonction de cas sur le signe de $k-\frac{AB^2}{2}$,

caractériser l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2+MB^2=k$