- PRODUIT SCALAIRE (dans le plan) - MATH PREMIÈRE SPÉ chapitre 5 : L'ESSENTIEL DU COURS

Définition :

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre défini par l'une ou l'autre des égalités ci-contre :

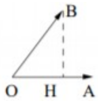
*Le produit scalaire de deux vecteurs est **un réel.** Ce n'est surtout pas un vecteur.*

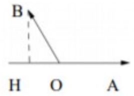
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$
  où $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans **un repère orthonormal** quelconque.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos\widehat{AOB}$
  où O , A et B sont trois points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.
  Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\begin{cases}OA\times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens}\\ -OA\times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire}\end{cases}$





H est le projeté orthogonal de B sur (OA)

Avec des vecteurs colinéaires :

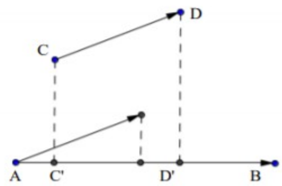
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de sens contraire** , alors $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

Avec des projections orthogonales :

Si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB), alors

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$$



Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs, on peut remplacer l'un deux par son projeté orthogonal sur la droite qui porte l'autre.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel, on a :

Symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

Linéarité : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ **et** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
$(k\,\vec{u})\cdot\vec{v}=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$ **et** $\vec{u}\cdot(k\,\vec{v})=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Carré scalaire et norme :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui même, $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$.
On le note $\vec{u}^2$. On a :

$$\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{u}\|=\|\vec{u}\|^2$$

Ce qui donne, pour deux points A et B : $\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$

Produit scalaire et orthogonalité :

$$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

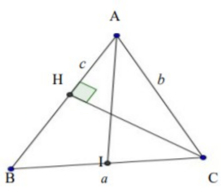
Applications :

Théorème d'Al Kashi :

Soit ABC un triangle quelconque.

On a : $a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos\widehat{A}$

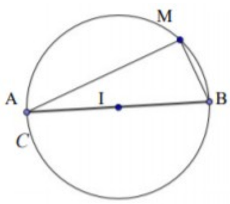
Ce théorème est aussi appelé **théorème de Pythagore généralisé.**



Cercle :

Soit A et B deux points distincts du plan.

L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre [AB]



Méthode à connaître :

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu du segment [AB].

Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$

En effet : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})\cdot(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2=MI^2-\frac{AB^2}{4}$