PRODUIT SCALAIRE (dans le plan)

1) PRODUIT SCALAIRE

A) DÉFINITION

➔ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan .

Ce n'est pas une multiplication !

Le produit scalaire de $\vec{u}$ **par** $\vec{v}$ noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre défini par l'une ou l'autre des égalités ci-dessous :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

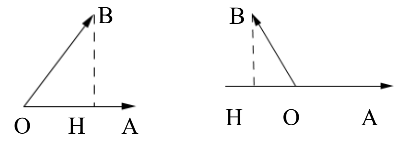
$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$ où $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans **un repère orthonormal** quelconque.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos\widehat{AOB}$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\begin{cases}OA\times OH & \textbf{si } \overrightarrow{OA} \textbf{ et } \overrightarrow{OH} \textbf{ sont de même sens}\\ -OA\times OH & \textbf{si } \overrightarrow{OA} \textbf{ et } \overrightarrow{OH} \textbf{ sont de sens contraire}\end{cases}$$

où O , A et B sont trois points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.



H est le projeté orthogonal de B sur (OA)

Le produit scalaire de deux vecteurs est ***un réel***

➔ Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, on pose $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Preuve de l'égalité de ces quatre expressions :

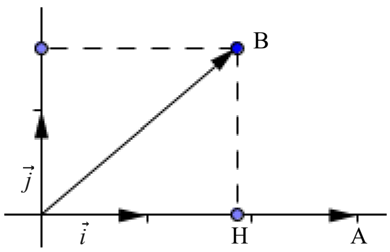
- Montrons que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=xx'+yy'$ où $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans un repère orthonormal quelconque.

$\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ donc:
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(x+x')^2+(y+y')^2=x^2+x'^2+2xx'+y^2+y'^2+2yy'$ et donc:

$$\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=\frac{1}{2}\left[(x^2+x'^2+2xx'+y^2+y'^2+2yy')-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)\right]$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+x'^2+2xx'+y^2+y'^2+2yy'-x^2-y^2-x'^2-y'^2)$$
$$=\frac{1}{2}(2xx'+2yy')=xx'+yy'$$

- Montrons que $OA\times OB\times\cos\widehat{AOB}=xx'+yy'$ où $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans un repère orthonormal bien choisi …

Choisissons un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OA}$ soient colinéaires et de même sens.
On note $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ les coordonnées respectivement de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.



On a alors: $x=OA$, $y=0$, $x'=OB\cos\widehat{AOB}$ et $y'=OB\sin\widehat{AOB}$
Ainsi $xx'+yy'=OA\times OB\cos\widehat{AOB}+0\times OB\sin\widehat{AOB}$
Donc $xx'+yy'=OA\times OB\cos\widehat{AOB}$.

- Montrons que $\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos \widehat{\mathrm{AOB}} = \begin{cases} \mathrm{OA} \times \mathrm{OH} \textit{ si } \overrightarrow{\mathrm{OA}} \textit{ et } \overrightarrow{\mathrm{OH}} \textit{ sont de même sens} \\ -\mathrm{OA} \times \mathrm{OH} \textit{ si } \overrightarrow{\mathrm{OA}} \textit{ et } \overrightarrow{\mathrm{OH}} \textit{ sont de sens contraire} \end{cases}$

Dans le repère défini ci-dessus, l'abscisse de H est celle de B, c'est à dire $\mathrm{OB} \cos \widehat{\mathrm{AOB}}$.
Ainsi $\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos \widehat{\mathrm{AOB}} = \mathrm{OA} \times x_H$

Deux cas se présentent :

- Si $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ sont de même sens, alors $\vec{i}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ sont de même sens et $x_H = \mathrm{OH}$;
 d'où $\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos \widehat{\mathrm{AOB}} = \mathrm{OA} \times \mathrm{OH}$

- Si $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ sont de sens contraire, alors $\vec{i}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ sont de sens contraire et $x_H = -\mathrm{OH}$;
 d'où $\mathrm{OA} \times \mathrm{OB} \times \cos \widehat{\mathrm{AOB}} = -\mathrm{OA} \times \mathrm{OH}$

Exemple 1 :

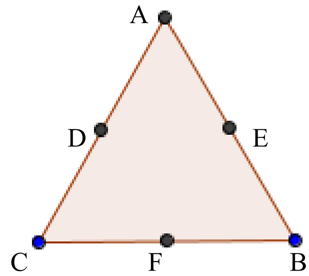
Soit A $(2\,;3)$, B $(-1\,;4)$ et C $(-2\,;1)$ trois points du plan muni d'un repère orthonormal.

On a $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-3) \times (-1) + (-3) \times 1 = 0$

Exemple 2 :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $\mathrm{AB} = 3$.
(dans l'unité de longueur choisie).

Les points E, F et D sont les milieux des côtés. On a alors:



- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \,.\, \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \cos \widehat{\mathrm{BAC}} = 3 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{2}$
  ou $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \,.\, \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AE} = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CE}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{CE} \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
  ou le projeté orthogonal de $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ sur (AB) est le vecteur nul, donc $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CE}} = 0$

B) REMARQUES

- Signe du produit scalaire :
On déduit facilement le signe du produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ suivant la nature de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$.
En effet les normes des deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ sont positives . On en déduit donc que $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ est du signe de $\cos \widehat{\mathrm{AOB}}$.

	$0 \leqslant \widehat{\mathrm{AOB}} < \frac{\pi}{2}$	$\widehat{\mathrm{AOB}} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \widehat{\mathrm{AOB}} \leqslant \pi$
Signe	$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} > 0$	$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$	$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} < 0$

- Le produit scalaire de deux vecteurs dépend de leur norme :

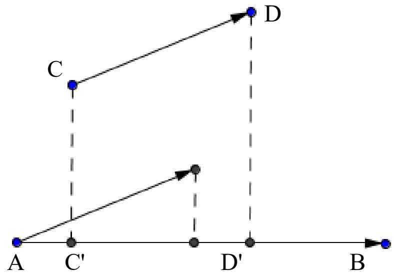
le cosinus d'un angle est un réel compris entre 1 et – 1 . On a donc:

$$-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \leqslant \vec{u} \cdot \vec{v} \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$

- Un cas agréable : les vecteurs colinéaires

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire , alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

C) COMPLÉMENTS SUR LES PROJECTIONS ORTHOGONALES



- D'après ce qui précède, on peut compléter la quatrième égalité du tableau :
  $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$
  En effet $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}=\begin{cases}OA\times OH \textit{ si } \overrightarrow{OA} \textit{ et } \overrightarrow{OH} \textit{ sont de même sens}\\ -OA\times OH \textit{ si } \overrightarrow{OA} \textit{ et } \overrightarrow{OH} \textit{ sont de sens contraires}\end{cases}$
- On a considéré les vecteurs de même origine, mais le résultat est le même dans les autres cas.
  Si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB),
  alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$

Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs, on peut remplacer l'un deux par son projeté orthogonal sur la droite qui porte l'autre.

2) PROPRIÉTÉS

A) OPÉRATIONS VECTORIELLES

Propriété :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel, on a :

Symétrie: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

Linéarité: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ **et** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
$(k\,\vec{u})\cdot\vec{v}=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$ **et** $\vec{u}\cdot(k\,\vec{v})=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Conséquence :

$a\cdot\vec{u}\cdot b\cdot\vec{v}=ab\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}$

(où a et b sont deux réels quelconques)

Preuve :

Pour la preuve, on se place dans un repère orthonormal et on note $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

- **Symétrie:** Immédiat, puisque $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'=x'x+y'y=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- **Linéarité:** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})$ $\begin{aligned}&=x(x'+x'')+y(y'+y'')\\&=xx'+xx''+yy'+yy''\\&=xx'+yy'+xx''+yy''\\&=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\end{aligned}$

On démontre de même les autres égalités.

Exemples :

- Calculer $(3\,\vec{u}-2\,\vec{v})\cdot(2\,\vec{u}+\vec{v})=$ 6 $\vec{u}$. $\vec{u}$ +3 $\vec{u}$. $\vec{v}$ -4 $\vec{v}$. $\vec{u}$ -2 $\vec{v}$. $\vec{v}$ =6 $\vec{u}$. $\vec{u}$ - $\vec{u}$. $\vec{v}$ -2 $\vec{v}$. $\vec{v}$
- Expliquer pourquoi les écritures suivantes n'ont pas de sens :
  - «$\vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{w}$» : $\vec{u}.\vec{v}$ est un réel, alors que $\vec{w}$ est un vecteur . Le produit scalaire entre un vecteur et un réel n'existe pas.
  - «$\vec{u}.\vec{v}+\vec{w}$» : $\vec{u}.\vec{v}$est un réel, alors que $\vec{w}$ est un vecteur . La somme entre un vecteur et un réel n'existe pas.
  - « $\vec{u}\cdot(k+\vec{v})$ » : k est un réel, alors que $\vec{v}$ est un vecteur . La somme entre un vecteur et un réel n'existe pas.

Remarques :

Il y a des ressemblances évidentes entre les règles de calcul du produit scalaire et celles sur les réels, mais **attention** il ne faut pas généraliser :

- En effet, on peut avoir en particulier $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ avec $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$.
- D'autre part $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ n'implique pas $\vec{v}=\vec{w}$.

B) CARRÉ SCALAIRE ET NORME

Définition :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui même, $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$

On a : $\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{u}\|=\|\vec{u}\|^2$

Ce qui donne, pour deux points A et B : $\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$

Remarques :

- Un vecteur $\vec{u}$ est unitaire si et seulement si $\vec{u}^2=1$.
- Après quelques calculs, on retrouve **des produits scalaires remarquables** (bien familiers ...)

$$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v} \qquad (\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v} \qquad (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$$

3) PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

Preuve :

- Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, le résultat est évident.
- Supposons $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$. On note α l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On a $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\alpha)$

Or $\|\vec{u}\|\neq 0$ et $\|\vec{v}\|\neq 0$, donc $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow \cos(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

Remarques:

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.
- On ne modifie pas le produit scalaire de deux vecteurs en ajoutant à l'un d'eux un vecteur orthogonal à l'autre.
  Si $\vec{w}\perp\vec{u}$, alors
  $$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{v}+0=\vec{u}\cdot\vec{v}$$
- Dans un repère orthonormal, le produit scalaire de $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$
  On en déduit que: $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow xx'+yy'=0$

4) QUELQUES APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

A) LE THEORÈME D'AL KASHI

Théorème : ...

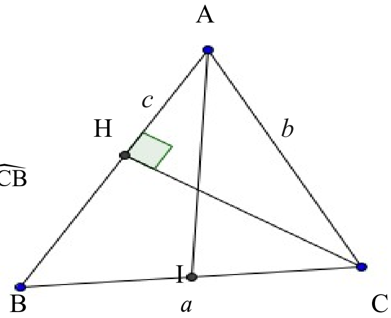
Soit ABC un triangle quelconque.

On a : $a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos\widehat{A}$

Ce théorème est aussi appelé théorème de Pythagore généralisé

L'usage est de noter :

- $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$
- $\widehat{A}=\widehat{BAC}$, $\widehat{B}=\widehat{ABC}$, $\widehat{C}=\widehat{ACB}$



Preuve :

On a $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

Ainsi $a^2=(\overrightarrow{BC})^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=AC^2+AB^2-2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=b^2+c^2-2\,bc\cos\widehat{A}$

Remarques :

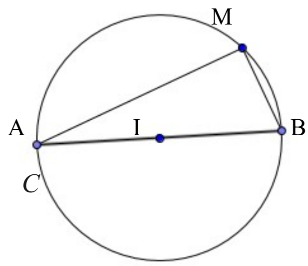
- De la même façon, on montre que : $b^2=a^2+c^2-2\,ac\cos\widehat{B}$ et $c^2=a^2+b^2-2\,ab\cos\widehat{C}$
- Si le triangle est rectangle en A , alors $\widehat{A}=\frac{\pi}{2}$, $\cos\widehat{A}=0$ et … $a^2=b^2+c^2$ *(On retrouve le théorème de Pythagore)*

B) ÉTUDIER UN ENSEMBLE DE POINT : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=0$

Propriété :

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de [AB].

- Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$
- L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre [AB]



Preuve :

- On a : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2=MI^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2=MI^2-\frac{AB^2}{4}$
- On a : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow MI^2-\frac{AB^2}{4}=0 \Leftrightarrow MI^2=\frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI=\frac{AB}{2} \Leftrightarrow M\in C_{\left(I;\frac{AB}{2}\right)}$.
  Il s'agit bien du cercle de diamètre [AB]