

Chapitre 5 - PRODUIT SCALAIRES (dans le plan)

1) PRODUIT SCALAIRES

A) DÉFINITION

→ Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan .

Ce n'est pas une multiplication !

Le produit scalaire de \vec{u} par \vec{v} noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le nombre défini par l'une ou l'autre des égalités ci-dessous :

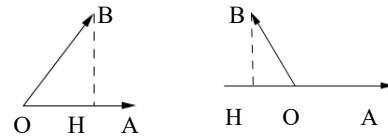
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \quad \text{où } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ sont les coordonnées respectives de } \vec{u} \text{ et de } \vec{v} \text{ dans un repère orthonormal quelconque.}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

où O, A et B sont trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.



H est le projeté orthogonal de B sur (OA)

Le produit scalaire de deux vecteurs est un réel

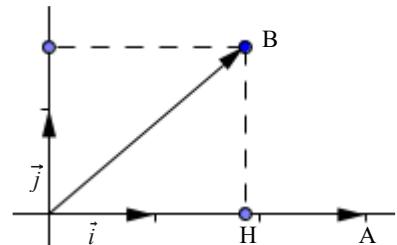
→ Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Preuve de l'égalité de ces quatre expressions :

- Montrons que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = xx' + yy'$ où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de \vec{u} et de \vec{v} dans un repère orthonormal quelconque.
- Montrons que $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = xx' + yy'$ où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} dans un repère orthonormal bien choisi ...

Choisissons un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ tel que \vec{i} et \overrightarrow{OA} soient colinéaires et de même sens.

On note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées respectivement de \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} .



- Montrons que $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$
Dans le repère défini ci-dessus, l'abscisse de H est celle de B, c'est à dire $OB \cos \widehat{AOB}$.
Ainsi $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} =$

Deux cas se présentent :

- Si \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OH} sont de même sens, alors \vec{i} et \overrightarrow{OH} sont de même sens et
- Si \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OH} sont de sens contraire, alors \vec{i} et \overrightarrow{OH} sont de sens contraire et

Exemple 1 :

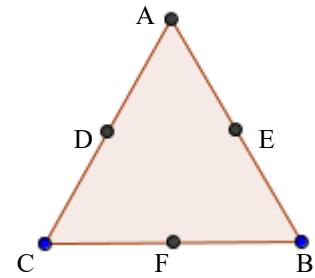
Soit A (2 ; 3), B (-1 ; 4) et C (-2 ; 1) trois points du plan muni d'un repère orthonormal.

Exemple 2 :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB=3$.
(dans l'unité de longueur choisie).

Les points E, F et D sont les milieux des côtés. On a alors:

-
-
-



B) REMARQUES

- Signe du produit scalaire :

On déduit facilement le signe du produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ suivant la nature de l'angle \widehat{AOB} .
En effet les normes des deux vecteurs \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} sont positives . On en déduit donc que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ est du signe de $\cos \widehat{AOB}$.

Signe	$0 \leq \widehat{AOB} < \frac{\pi}{2}$	$\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \widehat{AOB} \leq \pi$

- Le produit scalaire de deux vecteurs dépend de leur norme :

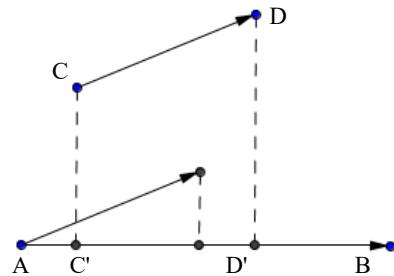
le cosinus d'un angle est un réel compris entre 1 et -1 . On a donc:

- Un cas agréable : les vecteurs colinéaires

- Si \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires et de même sens**, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$
- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de sens contraire , alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$

C) COMPLÉMENTS SUR LES PROJECTIONS ORTHOGONALES

- D'après ce qui précède, on peut compléter la quatrième égalité du tableau :
 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$
 En effet $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = \begin{cases} OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$
- On a considéré les vecteurs de même origine, mais le résultat est le même dans les autres cas.
 Si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB), alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$



Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs, on peut remplacer l'un deux par son projeté orthogonal sur la droite qui porte l'autre.

2) PROPRIÉTÉS

A) OPÉRATIONS VECTORIELLES

Propriété :

Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs du plan et k un réel, on a :

Conséquence :

$$a \cdot \vec{u} \cdot b \cdot \vec{v} = ab \cdot \vec{u} \cdot \vec{v}$$

(où a et b sont deux réels quelconques)

Preuve :

Pour la preuve, on se place dans un repère orthonormal et on note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} .

- Symétrie:** Immédiat, puisque $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = x'x + y'y = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- Linéarité:** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
 $(k \vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ et $\vec{u} \cdot (k \vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

On démontre de même les autres égalités.

Exemples :

- Calculer $(3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (2\vec{u} + \vec{v}) =$
- Expliquer pourquoi les écritures suivantes n'ont pas de sens :

- « $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$ » :

- « $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$ » :

- « $\vec{u} \cdot (k + \vec{v})$ » :

Remarques :

Il y a des ressemblances évidentes entre les règles de calcul du produit scalaire et celles sur les réels, mais **attention** il ne faut pas généraliser :

- En effet, on peut avoir en particulier $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- D'autre part $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'implique pas $\vec{v} = \vec{w}$.

B) CARRÉ SCALAIRES ET NORME

Définition :

Pour tout vecteur \vec{u} du plan, le produit scalaire de \vec{u} par lui-même, $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de \vec{u} . On le note \vec{u}^2

On a : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}| |\vec{u}| = |\vec{u}|^2$

Ce qui donne, pour deux points A et B : $\overline{AB}^2 = \|\overline{AB}\|^2 = AB^2$

Remarques :

- Un vecteur \vec{u} est unitaire si et seulement si $\vec{u}^2 = 1$.
- Après quelques calculs, on retrouve **des produits scalaires remarquables** (bien familiers ...)

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} \quad (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

3) PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ

Propriété :

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

\vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Preuve :

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le résultat est évident.
- Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. On note α l'angle entre \vec{u} et \vec{v} .

Remarques:

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.
- On ne modifie pas le produit scalaire de deux vecteurs en ajoutant à l'un d'eux un vecteur orthogonal à l'autre.
Si $\vec{w} \perp \vec{u}$, alors

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} + 0 = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

- Dans un repère orthonormal, le produit scalaire de $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

On en déduit que: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

4) QUELQUES APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRe

A) LE THEOREMÈE D'AL KASHI

Théorème : ...

Soit ABC un triangle quelconque.

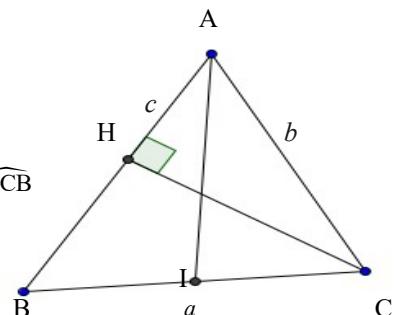
$$\text{On a : } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

Ce théorème est aussi appelé théorème de Pythagore généralisé

Preuve :

L'usage est de noter :

- $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$
- $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, $\hat{C} = \widehat{ACB}$



Remarques :

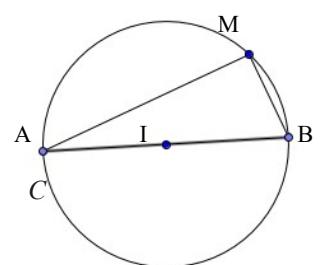
- De la même façon, on montre que :
- Si le triangle est rectangle en A, alors $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $\cos \hat{A} = 0$ et ... $a^2 = b^2 + c^2$ (On retrouve le théorème de Pythagore)

B) ÉTUDIER UN ENSEMBLE DE POINT : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Propriété :

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de [AB].

- Pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$
- L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB]



Preuve :