Nombre dérivé d'une fonction en « un point »

Ex 4-1 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

1) Pour savoir si une fonction f est dérivable en un réel a, on regarde la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers a.

2) Il existe des situations où l'on peut conjecturer facilement graphiquement si une fonction et non dérivable en un réel a.

3) Si une fonction f est dérivable en un réel a, alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet pour équation $y=f'(x)(x-a)+f(a)$

4) Il est équivalent de chercher $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

5) Il est possible qu'une fonction soit non dérivable en un réel a et que la courbe représentative de cette fonction admette tout de même une tangente.

Ex 4-2 : QCM : restituer les notions du cours

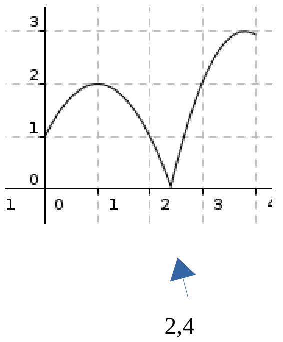
Soit f la fonction définie sur [0;4] représentée ci-dessous :

1) Au point d'abscisse 1 :

a) f n'est pas dérivable

b) f est dérivable et $f'(1)=0$

c) f est dérivable et $f'(1)=2$



2) Au point d'abscisse 2,4 :

a) f n'est pas dérivable

b) f est dérivable et $f'(2,4)=-1$

c) f est dérivable et $f'(2,4)=1$

3) Au point d'abscisse 0 :

a) f n'est pas dérivable

b) f est dérivable et $f'(0)\approx 2$

c) f est dérivable et $f'(0)\approx 1$

Ex 4-3 : La fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue f est définie pour tout réel x, par :

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

1) Justifier que, pour tout réel a non nul, f est dérivable en a et préciser la valeur de $f'(a)$ en fonction des valeurs de a.

2) **Dérivabilité de f en $a=0$**

a) Donner, suivant les valeurs du réel h non nul, une écriture du taux de variation $t(h)$ de f en zéro sans valeur absolue.

b) On note :

- $\lim_{h \to 0+} t(h)$ (appelée limite à droite de $t(h)$ en 0) la limite de $t(h)$ quand h tend vers 0 en étant supérieur à zéro.

- $\lim_{h \to 0-} t(h)$ (appelée limite à gauche de $t(h)$ en 0) la limite de $t(h)$ quand h tend vers 0 en étant inférieur à zéro.

Déterminer $\lim_{h \to 0+} t(h)$ et $\lim_{h \to 0-} t(h)$

c) Que peut-on en déduire au sujet de la dérivabilité de f en 0 ?

d) Représenter graphiquement la fonction f . Comment le résultat de la question c) s'observe sur la courbe représentative de f ?

<u>Ex 4-4 :</u> Calculer le nombre dérivé

Déterminer si le nombre dérivé de la fonction f en a existe et, si c'est le cas, calculer $f'(a)$.

1) $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$, $a=0$

2) $f : x \longmapsto |x-3|$, $a=3$

3) $f : x \longmapsto x^2+x+1$, $a=-1$

4) $f : x \longmapsto x^2\sqrt{x}$, $a=0$

5) $f : x \longmapsto |x-5|$, $a=3$

Ce que dit wikipédia à propos de la notion de tangente à une courbe :

Tangente vient du latin *tangere*, toucher : en géométrie, la **tangente** à une courbe en un de ses points est une droite qui « touche » la courbe au plus près au voisinage de ce point. La courbe et sa tangente forment alors un angle nul en ce point.
La notion de tangente permet d'effectuer des approximations : pour la résolution de certains problèmes qui demandent de connaître le comportement de la courbe au voisinage d'un point, on peut assimiler celle-ci à sa tangente. Ceci explique la parenté entre la notion de tangente et le calcul différentiel (c'est à dire les dérivées).

Se contenter comme on le fait parfois de définir la tangente comme une droite qui « touche la courbe sans la traverser » serait incorrect, puisque

- rien n'empêche la courbe de retraverser une de ses tangentes un peu plus loin (le concept de tangente au point *M* ne décrit bien la situation que dans un petit voisinage du point *M*).
- il y a des situations exceptionnelles où la tangente en *M* traverse la courbe justement au point *M*. On dit alors qu'il y a une inflexion en *M*.

Ex 4-5 : Exprimer $f'(a)$ en fonction de a

Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f . Déterminer alors, pour tout réel $a \in D_f$, si le nombre dérivé de f en a existe et, si c'est le cas, exprimer $f'(a)$ en fonction de a .

a) $f(x)=3x-2$

b) $f(x)=x^2$

c) $f(x)=\frac{1}{x}$

d) $f(x)=\sqrt{x}$

Ex 4-6 : Déterminer l'équation d'une tangente

Déterminer si la fonction f est dérivable en a et, si c'est le cas, déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a.
Tracer alors sur la calculatrice la courbe et la tangente.

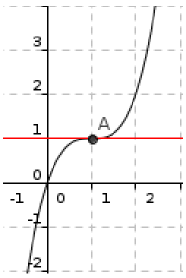
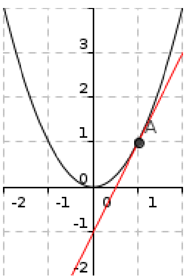
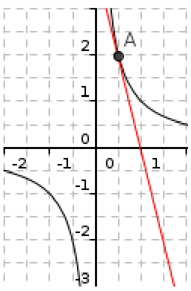
1) $f:x \longmapsto |x+1|$, $a=-3$

2) $f:x \longmapsto \sqrt{x-2}$, $a=2$

3) $f : x \longmapsto x^2$, $a=1$

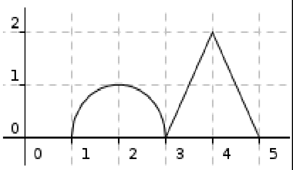
Ex 4-7 : Déterminer $f'(a)$ à l'aide d'un graphique.

Dans chacun des cas ci-dessous, on considère la courbe représentative C_f d'une fonction f , et A un point de C_f d'abscisse a .
Déterminer $f'(a)$.

1)	2)	3)
		

Ex 4-8 : Déterminer l'équation d'une tangente à l'aide d'un graphique

Soit f la fonction définie sur [1;5] dont la courbe représentative est donnée ci-contre :
Déterminer si f est dérivable en a .



Si tel est le cas, déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a .

1) $a=1$

2) $a=2$

3) $a=3$

4) $a=4$

5) $a=5$

Ex 4-9 : Algorithme - Python

1) On aimerait écrire un programme qui renvoie les valeurs du taux de variations d'une fonction $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ entre x_0 et x_0+h où h prend successivement les valeurs 10^{-p} où p est un entier qui varie de 0 à 10.
Compléter ce programme afin qu'il réponde au problème donné.

```
def f(a,b,c,x):
    return ...

a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=float(input("c="))
x=float(input("x="))
for i in range(0,11):
    t=(f(a,b,c,...........)-f(a,b,c,...........))/.............
    print(t)
```

2) Tester ce programme avec les deux exemples ci-dessous :

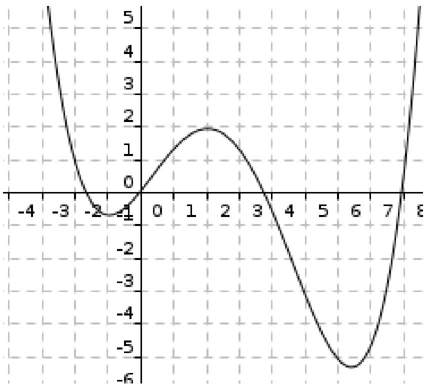
a) $f : x \longmapsto 2x^2-5x+4$, $x_0=3$

b) $f : x \longmapsto -x^2-2x+2$, $x_0=1$

Dans chaque cas, conjecturer grâce au programme la valeur de $f'(x_0)$, puis retrouver ce résultat par le calcul.

Ex 4-10 : Signe du nombre dérivé

La courbe représentative d'une fonction dérivable a été tracée ci-dessous.



Déterminer graphiquement le signe (ou l'éventuelle nullité) des réels suivants :

a) $f'(-3)$ b) $f'(1)$ c) $f'\left(\frac{4}{5}\right)$

d) $f'(2)$ e) $f'(5)$ f) $f'\left(\frac{50}{7}\right)$

Ex 4-11 : Tracer une courbe possible

Dans chacun des cas suivants, tracer une courbe représentative possible d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;3]$ et vérifiant la (ou les) conditions(s) proposée(s).

1) f est dérivable en 2 et $f'(2)=1$

2) f n'est pas dérivable en -1.

3) f est dérivable en -2 et en 2 et on a $f'(-2)=f'(2)=0$.

4) f est dérivable en 0 et on a $f'(0)=1$. f n'est pas dérivable en -1 et en 2.

5) f est dérivable en -3 et en 3 , $f'(-3)=1$, $f(3)=0$ et f est croissante sur $[0;3]$.

Règles de dérivation

Ex 4-12 : Vrai ou faux : restituer les notions du cours

1) Si f est définie sur un intervalle I, alors elle est dérivable sur I.

2) La fonction $f: x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \longmapsto x^2$

3) Une fonction affine a pour dérivée une fonction constante.

4) La dérivée d'une somme de deux fonctions dérivables u et v sur un intervalle I est la somme des dérivées u' et v' .

5) La dérivée d'un produit de deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I est le produit des dérivées u' et v' .

6) Pour que la fonction $\frac{1}{u}$ soit dérivable en a , il suffit que u ne s'annule pas en a .

Ex 4-13 : Calculs de dérivées

Dans chacun des cas, calculer la dérivée, en indiquant sur quel ensemble vos calculs sont valables.

1) $f: x \longmapsto 3x^3-2x^2+2x+5$ et $g: x \longmapsto \frac{3x^3-2x^2+2x+5}{2}$

2) $f: x \longmapsto (x-2)\times(x-4)$ et $g: x \longmapsto \frac{3(x-2)\times(x-4)}{4}$

3) $f : x \longmapsto (x-3)(x^4+1)$

4) $f : x \longmapsto (x^2-1)\sqrt{x}$

5) $f : x \longmapsto x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$ et $g : x \longmapsto 5x\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}$

6) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+3}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{7}{x^2+3}$

7) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2-1}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{2}\,x}{x^2-1}$

8) $f : x \longmapsto (3x-2)^2$ et $g : x \longmapsto 5(3x-2)^2$

9) $f : x \longmapsto \sqrt{3x-7}$

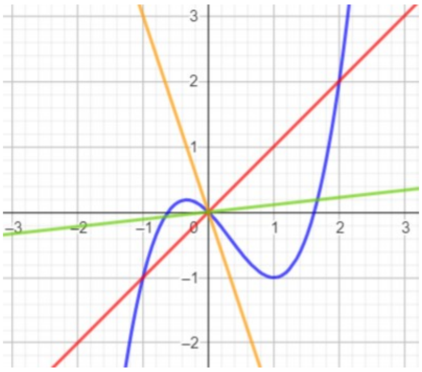
10) $f : x \longmapsto \left(\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}\right)^5$

Approfondissement

Ex 4-14 : Tangente parallèle à une droite donnée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-x^2-x$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.



1) Déterminer la fonction dérivée de f .

2) Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer lorsqu'elles existent, toutes les tangentes à C_f parallèles à la droite proposée .

Lorsqu'elles existent, préciser l'équation de ces tangentes, puis tracer les sur le graphique ci-dessus.

a) $d_1 : y=0$

b) $d_2 : y = x$

c) $d_3 : y = -3x$

d) $d_4 : y = \frac{1}{9}x$

Ex 4-15 : Retrouver une fonction de dérivée connue - primitives

Dans chaque cas, on connaît la fonction dérivée f' d'une fonction, mais pas la fonction f . Retrouver une fonction f qui convient, et préciser sur quel ensemble la réponse proposée est valable . Est-ce possible de trouver plusieurs expressions de f lorsque f' est donnée ?

a) $f'(x) = 5$

b) $f'(x) = 3x + 2$

c) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = 10x^9$

e) $f'(x)=3x-\frac{1}{x^2}$

Ex 4-16 : Même dérivée

1) Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier que les fonctions f et g ont la même fonction dérivée, puis exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

a) $f(x)=2+\frac{1}{x}$ et $g(x)=\frac{x+1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$

b) $f(x)=x^4-4+\frac{x^4}{x-1}$ et $g(x)=\frac{x^5-5x+5}{x-1}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

2) Que peut-on conjecturer ?

Ex 4-17 : Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Lorsque la fonction f' est elle-même dérivable sur I, on dit que la fonction dérivée de f' est la dérivée seconde de f , et on note f'' .

1) Dans chacun des cas ci-dessous, démontrer que la fonction proposée est dérivable sur I, et calculer sa dérivée . Étudier alors si la fonction dérivée admet une dérivée seconde sur I, et si c'est le cas, calculer cette dérivée seconde.

a) $f:x \longmapsto x^4-3x^3+2$ sur $\mathbb{R}$

b) $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

c) $h(x)=\sqrt{x}$ sur $[1;3]$

d) $i : x \longmapsto (-2x+1)^3$ sur $\mathbb{R}$

2) Lorsque c'est possible, on peut continuer la dérivation . On obtient alors les dérivées successives de la fonction f : dérivée troisième $f^{(3)}$, dérivée quatrième $f^{(4)}$ …
Calculer, lorsque c'est possible, les dérivées troisième et quatrième des fonctions vues précédemment.

Ex 4-18 : Condition nécessaire et suffisante ?

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

1) Rappeler la propriété du cours permettant de parler de la dérivabilité de la fonction $f \times g$ sur un intervalle J contenu dans I.

2) Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x$ et $g(x)=\sqrt{x}$. Rappeler les ensembles de dérivabilité et les fonctions dérivées de f et g

Démontrer que la fonction $f \times g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

3) Comment pourrait-on exprimer les résultats des deux questions précédentes en termes de condition nécessaire et suffisante ?

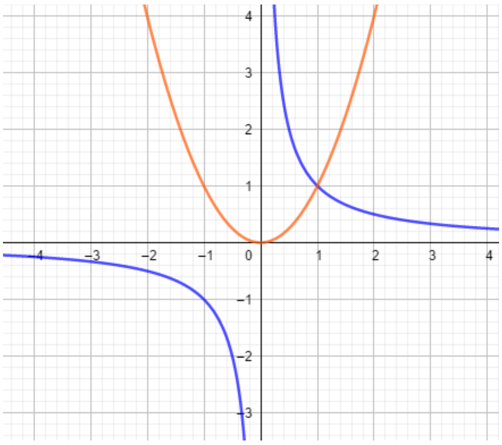
<u>Ex 4-19 :</u> Tangente commune : parabole et hyperbole

On considère la fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ et la fonction inverse $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

On note C_f et C_g leurs courbes représentatives respectives.

Le but du problème et de trouver d'éventuelles droites tangentes à la fois à C_f et à C_g

1) Conjecturer le résultat cherché.

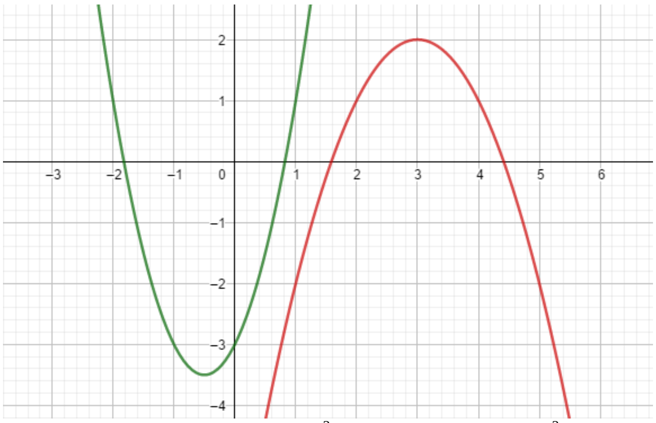


2) Démontrer le résultat conjecturé.

<u>Aide :</u>

Considérer deux réel a et b , puis déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse a et celle de C_g au point d'abscisse b . Chercher à quelles conditions ces tangentes sont confondues.

<u>Ex 4-20 :</u> Tangente commune : deux paraboles



Montrer que les paraboles $P_1 : y=2x^2+2x-3$ et $P_2 : y=-x^2+6x-7$ admettent deux tangentes communes bien qu'elles n'admettent aucun point commun.

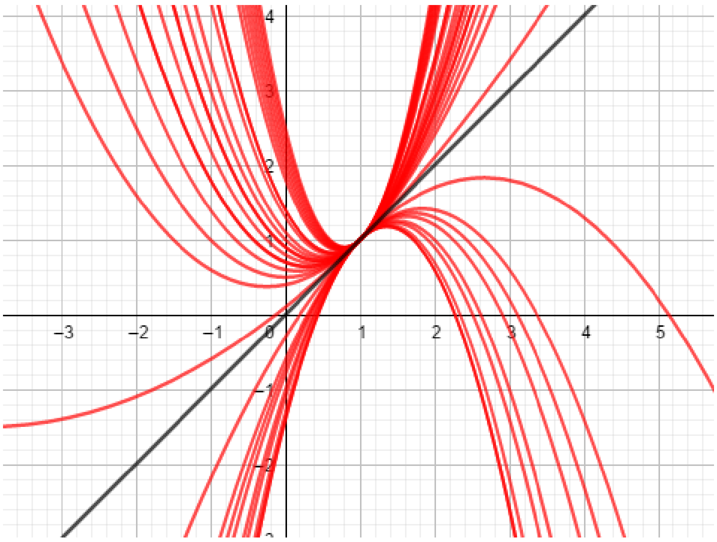
Déterminer l'équation réduite de chacune de ces tangentes.

<u>Ex 4-21 :</u> Ensemble de Paraboles - GéoGebra

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$, on considère la droite $d : y=x$.
On aimerait déterminer l'ensemble des paraboles admettant d pour tangente au point d'abscisse 1, et montrer que l'ensemble des sommets de ces paraboles varie sur un ensemble que l'on déterminera.

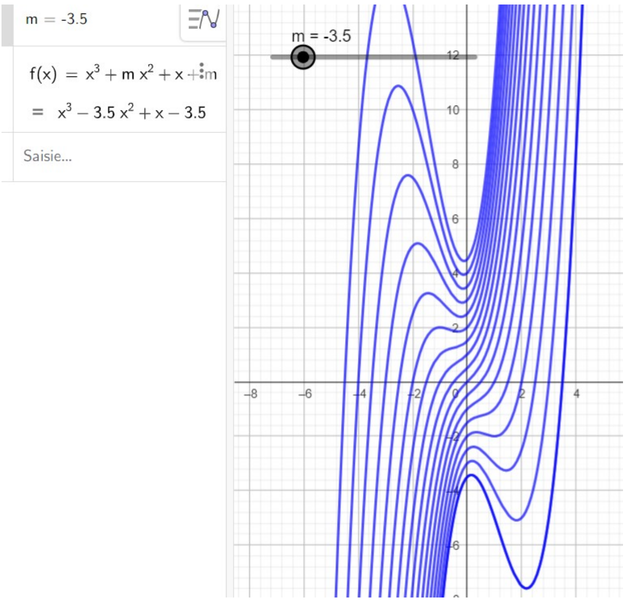
1) Conjecturer le résultat cherché avec GeoGebra ou en utilisant la représentation ci-dessous.

2) Démontrer le résultat conjecturé.



Ex 4-22 : : Avec un paramètre

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la famille de fonctions f_m définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_m(x) = x^3 + m x^2 + x + m$



Déterminer toutes les valeurs de m telles que la courbe représentative C_m de f_m admette deux tangentes horizontales.