# DÉRIVATION

## 1 ) LIMITE FINIE D'UNE FONCTION EN ZERO

### A ) ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{4-4(1-x)^2}{x}$, $\qquad D_f = \mathbb{R}^*$

$f(0)$ n'existe pas, mais $f(x)$ est calculable pour toutes les valeurs de $x$ très voisines de 0. Que deviennent les nombres $f(x)$ lorsque $x$ prend des valeurs voisines de zéro, par exemple celles de $]-0,9\,;0[\cup]0\,;0,9[$?

Le tableau de valeurs ci-dessous, nous permet de constater que les nombres $f(x)$ s'accumulent autour de 8, lorsque $x$ est voisin de 0 …

| $x$ | -0,9 | -0,5 | -0,1 | -0,01 | -0,001 | 0,001 | 0,01 | 0,1 | 0,5 | 0,9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 11.6 | 10 | 8,4 | 8.04 | 8,004 | 7,996 | 7,96 | 7,6 | 6 | 4,4 |

Le résultat n'est, en fait, pas surprenant . En effet :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a: $f(x) = \dfrac{4-4(1-2x+x^2)}{x} = \dfrac{8x-4x^2}{x} = 8-4x$

Ainsi, lorsque $x$ prend des valeurs de plus en plus voisines de zéro, les nombres $8-4x$ s'accumulent autour de 8.
Plus précisément, ils finissent par se trouver dans tout intervalle $I = ]8-\varepsilon\,;8+\varepsilon[$, aussi petit que soit $\varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$. Par exemple, si on choisit $\varepsilon = 0{,}001$, tous les nombres 8 – 4x sont dans $I$ , lorsque $-0{,}00025 < x < 0{,}00025$.

On dit alors que 8 est la limite de $f$ en 0 et on note : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 8$

### B ) CAS GÉNÉRAL

**Définition :**

Soit $f$ une fonction telle que zéro soit dans son ensemble de définition $Df$ ou soit une borne de $Df$.
Intuitivement, dire que $f$ a pour limite $L$ en zéro, signifie que lorsque $x$ prend des valeurs de plus en plus proches de zéro, « **les nombres** $f(x)$ **correspondants viennent s'accumuler autour de** $L$ ».
C'est à dire que pour tout $\varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$, aussi petit qu'il soit, les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]L-\varepsilon\,;L+\varepsilon[$.

On note : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$

### C ) QUELQUES RÉSULTATS A CONNAÎTRE … ( admis )

**Remarque importante:**

On admet que si une fonction $f$ est définie en 0 et si $f$ admet une limite finie en 0 (on dit que $f$ est continue en 0), alors: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.
C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée… et des composées de ces fonctions.

- $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^n = 0$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )
- Soit $P$ une fonction polynôme et $Q$ est une fonction rationnelle définie en $0$, alors :

  $\lim\limits_{x \to 0} P(x) = P(0)$ et $\lim\limits_{x \to 0} Q(x) = Q(0)$

- Si, de plus, $P$ et $Q$ sont définies et positives au voisinage de 0, alors :

  $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{P(x)} = \sqrt{P(0)}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{Q(x)} = \sqrt{Q(0)}$

- Soit $f$ et $g$ deux fonctions telles que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = L'$, alors :

  $\lim\limits_{x \to 0} (f+g)(x) = L+L'$ et $\lim\limits_{x \to 0} (f \times g)(x) = L \times L'$

**Exemples :**

$\lim\limits_{x \to 0} (-3x^2+2x-8) = -8$ ; $\quad \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{4x+2}{x^2+1}\right) = 2$ ; $\quad \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\dfrac{4x+2}{x^2+1}} = \sqrt{2}$ ; $\quad \lim\limits_{x \to 0} \left(-3x^2+2x-8+\sqrt{\dfrac{4x+2}{x^2+1}}\right) = -8+\sqrt{2}$

## 2 ) FONCTION DÉRIVABLE – NOMBRE DÉRIVÉ

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et $a \in D_f$ .

**Définition :**

Dire que la fonction $f$ est dérivable en $a$ et que le nombre dérivé de $f$ en $a$ est le réel $L$, revient à dire que le taux de variation de $f$ en $a$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet pour limite finie $L$ quand $h$ tend vers 0.

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

**Exemple :** Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur ℝ et $a$ un réel quelconque.

Pour $h \neq 0$, on a: $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = 2a + h$

Or $\lim\limits_{h \to 0} (2a + h) = 2a$, donc $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = 2a$.

## 3 ) QUELQUES APPLICATIONS

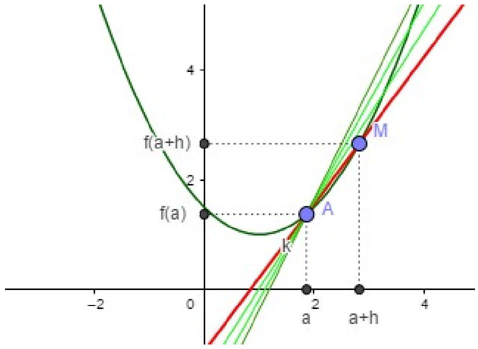
### A ) TANGENTE EN UN POINT

**Un peu d'intuition …**

Soit $M$ le point de $C_f$ d'abscisse $a + h$.

Le coefficient directeur de la droite $(AM)$ est : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Géométriquement, la tangente à $C_f$ au point $A$ se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes $(AM)$ lorsque $M$ tend vers $A$ en restant sur la courbe.
Si $f$ est dérivable en $a$, la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f'(a)$, et passe par $A$.




**Propriété :**

Si $f$ est dérivable en $a$, la courbe $C_f$ admet au point $A(a\,;f(a))$ une tangente $T$ de coefficient directeur $f'(a)$.

Une équation de la tangente en ce point est: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

**Preuve:**

$T$ ( n'étant pas parallèle à l'axe des ordonnées) admet une équation de la forme $y = f'(a)x + p$ . De plus elle passe par $(a\,; f(a))$ .
On a donc : $f(a) = f'(a)a + p \quad \Leftrightarrow \quad p = f(a) - af'(a)$
$T$ admet donc pour équation : $y = f'(a)x + f(a) - af'(a) \quad \Leftrightarrow \quad y = f'(a)(x - a) + f(a)$

**Cas particuliers importants :**

- Si $f'(a) = 0$, $C_f$ admet au point d'abscisse $a$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation $y = f(a)$.
- Si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$ ( ou $-\infty$ ) , $f$ n'est pas dérivable en $a$, mais $C_f$ admet une tangente verticale d'équation $x = a$ .

### B ) UN PEU DE PHYSIQUE : INTERPRÉTATION CINÉMATIQUE DU NOMBRE DÉRIVÉ

Un mobile ponctuel se déplace sur un axe . On note $d(t)$, la distance qu'il a parcourue à l'instant $t$ . (loi horaire)

Comme vous l'avez peut-être vu en physique, la vitesse instantanée du mobile à l'instant $t_o$ est la limite des vitesses moyennes $\dfrac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}$ lorsque $h$ tend vers 0. Il s'agit du nombre dérivée en $t_o$ de la fonction $d$.

**Autres domaines... :**

**Le taux de variation** $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ mesure en général la variation moyenne d'une grandeur sur un certain intervalle ( débit moyen , coût moyen de production …).

**Le nombre dérivé**, lui, est une mesure instantanée ( débit instantané , coût marginal …) .

## 4 ) FONCTIONS DÉRIVÉES

### A ) DÉFINITION

**Définition :**

On dit qu'une fonction $f$ est **dérivable** sur un intervalle $I$ ( $I \subset D_f$ ) si pour tout $x$ appartenant à $I$, le nombre dérivé de $f$ en $x$ existe.

**La fonction dérivée** de $f$ sur $I$ est la fonction, notée $f'$, qui, à tout $x$ de $I$, associe le réel $f'(x)$.

Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

*Par abus de langage, on dit que $f'$ est « la dérivée de $f$ »*

**Exemple :**
La fonction $f : x \longmapsto x^2$ est définie et dérivable sur ℝ et sa fonction dérivée est $f' : x \longmapsto 2x$.

**Remarque :**
On appelle **ensemble de dérivabilité** de la fonction $f$, l'ensemble sur lequel la fonction dérivée $f'$ est définie.
Cet ensemble ( noté $D_{f'}$ ) est toujours inclus dans $D_f$ .

## B ) DÉRIVÉES DE QUELQUES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

| | Fonction $f$ | Fonction dérivée $f'$ | Ensemble de dérivabilité |
|---|---|---|---|
| 1 ) | $f : x \longmapsto k \ (k \in \mathbb{R})$ | $f' : x \longmapsto 0$ | $\mathbb{R}$ |
| 2 ) | $f : x \longmapsto x$ | $f' : x \longmapsto 1$ | $\mathbb{R}$ |
| 3 ) | $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ | $f' : x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0 ; +\infty[$ Cette fonction n'est pas dérivable en 0 |

**Preuves :** On choisit toujours $h$ , au voisinage de $a$ et de telle sorte que $f(a+h)$ soit définie.

1 ) Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour $h \neq 0$, on a $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{k-k}{h} = 0$

, donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 0$.

Ainsi, pour tout réel $a$, $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = 0$

2 ) Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour $h \neq 0$, on a $t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{a+h-a}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$

, donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = 1$.

Ainsi, pour tout réel $a$, $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = 1$

3 ) Si $a > 0$.

Pour $h > 0$,

$t(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \dfrac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}) \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$

Donc $t(h) = \dfrac{a+h-a}{h \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}$.

Or $\lim\limits_{h \to 0} \sqrt{a+h} = \sqrt{a}$, donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Ainsi, pour tout réel $a > 0$ , $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Si $a = 0$.

Pour $h > 0$, $t(h) = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$, donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = +\infty$, ce qui n'est pas un réel...

Donc $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ , n'est pas dérivable en 0.

## 5 ) OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

### A ) SOMME , PRODUIT …

**Propriétés :**

Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $D$ ( $D$ représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints )et $k$ un réel, alors :

- Les fonctions $k \cdot u$ , $u+v$ et $u \cdot v$ sont dérivables sur $D$ et:
  $(k \cdot u)' = k \cdot u'$ (1) , $(u+v)' = u' + v'$ (2) et $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ (3).
- Si pour tout réel $a$ de $D$, $v(a) \neq 0$, les fonctions $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont dérivables sur $D$ et:
  $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ (4) , $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$ (5).

**Preuves :**

1 ) Soit $a \in D$.

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{(k \cdot u)(a+h) - (k \cdot u)(a)}{h} = \dfrac{k \cdot (u(a+h)) - k \cdot (u(a))}{h} = k \cdot \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h}$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = k \cdot u'(a)$ . Ainsi $k \cdot u$ est dérivable en $a$ et $(k \cdot u)'(a) = k \cdot u'(a)$ pour tout $a \in D$.

2 ) Soit $a \in D$.

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$.

Donc $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$ . Ainsi $u+v$ est dérivable en $a$ et $(u+v)'(a) = u'(a) + v'(a)$ pour tout $a \in D$.

3 ) Soit $a \in D$.

Pour $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{(u \cdot v)(a+h) - (u \cdot v)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$

$t(h) = \dfrac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a+h) + u(a) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$

$t(h) = \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h}$

Comme $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0} v(a+h) = v(a)$ (admis, mais intuitif ),

Alors $\lim\limits_{h \to 0} t(h) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a) = (u \cdot v)'(a)$, pour tout $a \in D$.

Ainsi $u \cdot v$ est dérivable en $a$ et $(uv)(a) = u(a)v'(a) + u'(a)v(a)$ , pour tout $a \in D$.

4 ) Soit $a \in D$.

Pour tout $h \neq 0$, $t(h) = \dfrac{\dfrac{1}{v(a+h)} - \dfrac{1}{v(a)}}{h} = \dfrac{v(a) - v(a+h)}{h \times v(a) \times v(a+h)} = -\dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \dfrac{1}{v(a) \times v(a+h)}$

Or $\lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{v(a+h) - v(a)}{h} = -v'(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{v(a) \times v(a+h)} = \dfrac{1}{v(a)^2}$ (admis, mais intuitif).

Donc $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(a) = \lim\limits_{h \to 0} t(h) = -\dfrac{v'(a)}{v(a)^2}$, pour tout $a \in D$.

Ainsi $\dfrac{1}{v}$ est dérivable en $a$ et $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(a) = -\dfrac{v'(a)}{v(a)^2}$ , pour tout $a \in D$.

5 ) Puisque $\frac{u}{v}=u\times\frac{1}{v}$, il suffit de se rapprocher des preuves 3) et 4)...

## B) CONSÉQUENCES : de nouvelles formules à retenir

| Fonction $f$ | Fonction dérivée $f$ ’ | Ensemble de dérivabilité |
|---|---|---|
| $f:x\longmapsto x^2$ | $f':x\longmapsto 2x$ | $\mathbb{R}$ |
| $f:x\longmapsto x^3$ | $f':x\longmapsto 3x^2$ | $\mathbb{R}$ |
| $f:x\longmapsto x^n\ (n\in\mathbb{N}^*)$ | $f':x\longmapsto nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ |
| $f:x\longmapsto \frac{1}{x}$ | $f':x\longmapsto -\frac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $f:x\longmapsto \frac{1}{x^2}$ | $f':x\longmapsto -\frac{2}{x^3}$ | $\mathbb{R}^*$ |
| $f:x\longmapsto \frac{1}{x^n}\ (n\in\mathbb{N}^*)$ | $f':x\longmapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$ | $\mathbb{R}^*$ |

**Remarque :**

Pour $x\neq 0$, on a $\frac{1}{x^n}=x^{-n}=x^m$, alors $\left(\frac{1}{x^n}\right)'=(x^m)'=mx^{m-1}=-nx^{-n-1}=-\frac{n}{x^{n+1}}$

Ainsi la formule de la dérivée de $f:x\rightarrow x^n$ est vraie pour tout entier relatif $n$, en n’oubliant pas la condition $x\neq 0$ si $n<0$.

## C ) DÉRIVÉE DE $f:x\longmapsto g(ax+b)$

**Propriété :**

Soit $a$ et $b$ deux réels et $g$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.
Pour tout réel $x$, tel que $ax+b\in I$, la fonction $f$ définie par $f(x)=g(ax+b)$ est dérivable , et on a :

$$f'(x)=ag'(ax+b)$$

**Exemple :** Déterminer sur $\mathbb{R}$ la dérivée de la fonction $f$ définie par $f(x)=(2x-5)^4$

Pour tout réel $x$ , on pose $f(x)=g(2x-5)$ où $g:x\longmapsto x^4$

$g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$ , on a : $g'(x)=4x^3$

On en déduit que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$ , on a : $f'(x)=2g'(2x-5)=2\times4\times(2x-5)^3=8(2x-5)^3$

## D ) POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

**Propriétés :**

- Toute fonction polynôme est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

**Remarque:**

Si $P$ est un polynôme de degré $n>0$, alors $P'$ est un polynôme de degré $n-1$.

**Exemple :**

Soit $P$ le polynôme définit sur $\mathbb{R}$ par $P:x\longmapsto 3x^3+5x^2-x+3$
$P$ est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc $P$ est dérivable et pour tout réel $x$:

$P'(x)=3\times3x^2+5\times2x-1=9x^2+10x-1$.

**Exemple :**

Soit $f$ la fonction rationnelle définit par $f:x\longmapsto\frac{2x^2+1}{x-1}$

On peut écrire $f=\frac{u}{v}$ où $u(x)=2x^2+1$ et $v(x)=x-1$

On a $v(x)=0$ pour $x=1$, donc $D_f=\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

$u$ et $v$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et pour tout $x\neq 1$, on a:

$f'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, donc $f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-v'(x)\times u(x)}{v(x)^2}$ avec $u'(x)=2\times2x=4x$ et $v'(x)=1$

Donc $f'(x)=\frac{4x(x-1)-1\times(2x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{4x^2-4x-2x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x-1}{(x-1)^2}$.