Le radian – Arcs de cercle

Ex 3-1 : Conversion

Compléter le tableau suivant :

Mesure en degré	90	210			15		120
Mesure en radian			$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{45\pi}{2}$	

Ex 3-2 : Longueurs d'arcs de cercle

Calculer les longueurs d'arcs de cercle dans les cas suivants :
1) Un arc de cercle de diamètre 5 cm et d'angle $\frac{\pi}{4}$ rad.

2) Un arc de cercle d'angle 210° et de rayon unitaire.

3) Un arc de cercle de rayon 20 cm et d'angle $\frac{2\pi}{5}$ rad.

4) Un arc de cercle de rayon unitaire et d'angle 150°.

Ex 3-3 : Angle au centre

Sur un cercle de rayon R, déterminer la mesure en degré des angles des arcs de cercle de longueur L dans chacun des cas suivants :

1) R=5 et $L=\pi$

2) R=0,5 et $L=\frac{\pi}{6}$

3) R=10 et $L=\frac{20\pi}{3}$

Ex 3-4 : Cadran d'horloge

Un cadran d'horloge dispose de deux aiguilles . Celle des minutes mesure 12 cm et celle des heures 6 cm.
Calculer la distance parcourue par l'extrémité de la grande aiguille depuis midi lorsqu'il est :

1) 12h05

2) 12h25

3) 13h15

4) 16h32

L'enroulement de la droite numérique

Ex 3-5 : QCM

Dans chaque question, déterminer la (ou les) bonne(s) réponses.

1) Le sens trigonométrique est :

a) le sens des aiguilles d'une montre ; b) le sens direct ;

c) le sens inverse des aiguilles d'une montre ; d) le sens indirect.

2) Le cercle trigonométrique est tel que :

a) son rayon vaut π b) son diamètre vaut 2

c) son périmètre vaut 360° d) son périmètre vaut 2π

3) Si un segment est enroulé dans le sens trigonométrique autour du cercle trigonométrique les longueurs associées seront :

a) positives b) négatives c) de signe quelconque

4) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, deux points x et y de la droite numérique :

a) espacés de 3π ne sont pas situés sur le même point du cercle.

b) sont situés sur le même point du cercle que s'ils sont espacés d'un multiple de 360°.

c) sont situés sur le même point du cercle que s'ils sont espacés d'un multiple de 2π .

d) espacés de -8π sont situés sur le même point du cercle.

Ex 3-6 : Vrai ou faux

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique.

1) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, tous les points de la droite numérique correspondant aux réels du type $k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ coïncident avec le point I.

2) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, tous les points de la droite numérique correspondant aux réels du type $\pi+k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ coïncident avec le point I.

3) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, aucun point de la droite numérique ne peut correspondre au point O.

4) Après enroulement sur le cercle trigonométrique dans le sens direct, tous les points de la droite numérique correspondant aux réels du type $\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ coïncident avec le point J.

Ex 3-7 : Se repérer sur le cercle trigonométrique

Placer sur le cercle trigonométrique les points ci-dessous correspondants, après enroulement autour du cercle trigonométrique, aux abscisses suivantes de la droite numérique :

points	A	B	C	D	E	F	G	H
abscisses	0	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	-2000π	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{-5\pi}{4}$	11π

Ex 3-8 : Même point-image ?

Indiquer, en justifiant la réponse, si les deux réels de chaque couple ont le même point-image sur le cercle trigonométrique.

1) $\frac{18\pi}{5}$ et $\frac{3\pi}{5}$

2) $\frac{-7\pi}{3}$ et $\frac{7\pi}{3}$

3) $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{-19\pi}{6}$

4) $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{15\pi}{4}$

Sinus et cosinus d'un nombre réel

Ex 3-9 : Vrai ou faux

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique.
Soit M le point du cercle trigonométrique correspondant à x après enroulement de la droite numérique.

1) L'abscisse du point M est $\sin x$.

2) L'ordonnée du point M est $\sin x$.

3) La longueur du segment [OM] est 2π .

4) L'ordonnée du point M est comprise entre -1 et 1.

5) L'abscisse du point M est positive.

Ex 3-10 : Vrai ou faux

Soit x un réel quelconque.

1) $\cos x+\sin x=1$

2) $-1\leqslant\sin x\leqslant1$

3) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

4) $\cos(-x)=\sin x$

5) $0\leqslant\cos x\leqslant1$

6) $\cos x\leqslant\sin x$

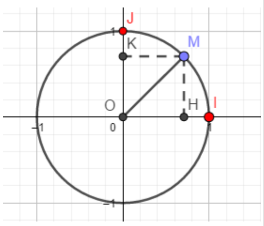
7) $\sin(x+2k\pi)=\sin x$, $k\in\mathbb{R}$

8) $\sin(-x)=-\sin(x)$

Ex 3-11 : valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique . M est un point du cercle trigonométrique associé au réel $\frac{\pi}{4}$.

H et K sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (OI) et (OJ).



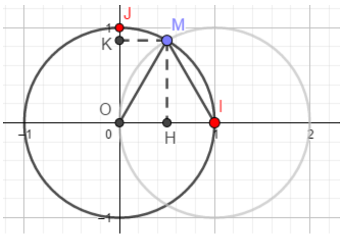
1) Quelle est la nature du triangle OMH ?

2) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$, puis celle de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Ex 3-12 : valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique . M est un point du cercle trigonométrique associé au réel $\frac{\pi}{3}$.

H et K sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur (OI) et (OJ).



1) Quelle est la nature du triangle OMI ?

2) Que peut-on alors dire de la hauteur (MH) du triangle OMI ?

3) En déduire la longueur OH, puis la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

4) Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Ex 3-13 : Signe du cosinus ou du sinus

Donner le signe du sinus ou du cosinus dans chacun des cas suivants :

a) $\sin x$ et $x\in[0;\pi]$

b) $\cos x$ et $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

c) $\sin x$ et $x\in[-\pi;0]$

d) $\cos x$ et $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

Ex 3-14 : Un peu de logique

1) Si $\cos x=\frac{1}{2}$, alors $x=\frac{\pi}{3}$

2) Si $x=\frac{\pi}{4}$, alors $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) Si $\cos x=-\frac{1}{2}$ ou $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $x=\frac{2\pi}{3}$

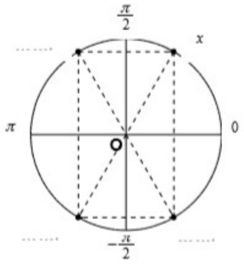
4) Si $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x=\frac{1}{2}$, alors $x=\frac{5\pi}{6}$

5) Si $\cos(2x)=\cos(2y)$, alors $\cos x=\cos y$

Ex 3-15 : Formules à connaître et surtout à retrouver

1) a) Compléter les pointillés avec :

$\pi+x$, $\pi-x$ et $-x$



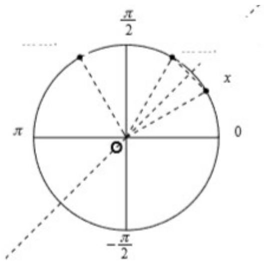
b) En utilisant les propriétés des symétries, en déduire :

$\cos(\pi+x)=$ $\cos(\pi-x)=$

$\sin(\pi+x)=$ $\sin(\pi-x)=$

2) a) Compléter les pointillés avec :

$\frac{\pi}{2}-x$ et $\frac{\pi}{2}+x$



b) En utilisant les propriétés des symétries, en déduire :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$

<u>Ex 3-16 :</u> Calculs

Calculer les sinus et les cosinus des réels suivants :

1) $\frac{5\pi}{6}$

2) $-\frac{11\pi}{2}$

3) $-\frac{2\pi}{3}$

4) $\frac{9\pi}{4}$

5) $-\frac{\pi}{6}$

6) $\frac{1947\pi}{2}$

<u>Ex 3-17 :</u> Calculs

Calculer la valeur du produit $\cos x \times \sin y$ dans les cas suivants :

1) $x=0$ et $y=\pi$

2) $x=\frac{\pi}{3}$ et $y=\frac{\pi}{3}$

3) $x=0$ et $y=-\frac{\pi}{4}$

4) $x=\pi$ et $y=-\frac{\pi}{2}$

5) $x=527$ et $y=240\pi$

6) $x=\frac{17\pi}{2}$ et $y=17$

Ex 3-18 : ***Simplifications***

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A=\cos(\pi-x)+2\cos x-3\cos(x+\pi)$

2) $B=\sin(x+5\pi)+3\sin(x+7\pi)-\sin(-x)$

3) $C=\cos(-x)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$

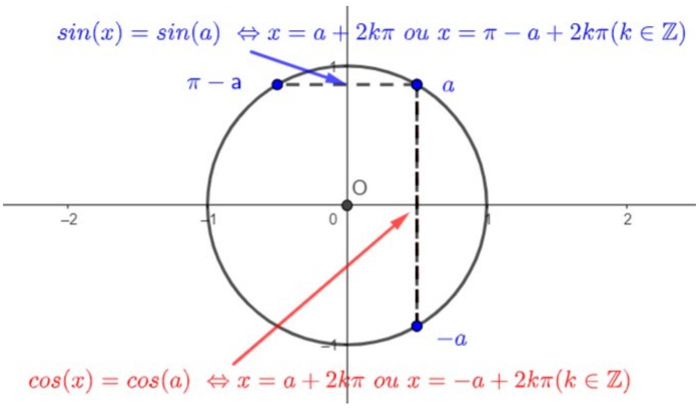
4) $D=\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(5\pi+x)$

5) $E=\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{10\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{13\pi}{7}\right)$

6) $F=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

Ex 3-19 : Déterminer les réels correspondant à une valeur remarquable de sinus ou de cosinus

Dans cet exercice, on utilisera :



Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

1) $\sin x=0$

2) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

3) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $2\cos(3x)=1$

6) $\cos x+\sin x=7$

7) $\cos x+3=2$

8) $4\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-2$

<u>Ex 3-20 :</u> Déterminer un réel connaissant son sinus ou son cosinus

Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près d'un réel x vérifiant :

Attention :

- Pour les touches arccos ou $\cos^{-1}$ de la calculatrice le résultat retourné appartient à l'intervalle $[0;\pi]$.
- Pour les touches arcsin ou $\sin^{-1}$ de la calculatrice le résultat retourné appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

1) $\cos x=\frac{1}{4}$

2) $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{2}$

3) $3\sin x=1$

4) $\cos^2 x=1-\sqrt{2}$

5) $\sin(x-\pi)=\frac{\pi}{3}$

6) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ex 3-21 : Sinus correspondant à un cosinus et inversement

Connaissant la valeur de $\cos x$ ou de $\sin x$ sur un intervalle donné, déterminer la valeur du sinus ou du cosinus correspondant :

1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

2) $\cos x = -\frac{1}{2}$ et $x \in]0; \pi]$

3) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in [\pi; 2\pi]$

4) $\sin x = \frac{1}{2}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Ex 3-22 : Système d'équations

Déterminer les solutions réelles des systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Ex 3-23 : Trigonométrie et géométrie

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique.
Soit M,N,P et Q les points dont les coordonnées sont données ci-dessous.
α et β sont deux réels . Pour chaque point, déterminer s'ils sont situés à l'intérieur du cercle trigonométrique, sur le cercle , ou à l'extérieur du cercle.

$M(\sin \alpha ; \cos \alpha)$

$N(-0{,}5 \cos \alpha ; 0{,}5 \sin \alpha)$

$P(\cos\alpha - \sin\alpha ; \sin\alpha + \cos\alpha)$

$Q(\cos\alpha \times \cos\beta - \sin\alpha \times \sin\beta ; \sin\alpha \times \cos\beta + \cos\alpha \times \sin\beta)$

<u>Ex 3-24 :</u> Équation produit

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1) En remarquant que $(\cos x - \sin x)^2 \geqslant 0$, en déduire que :
$\cos x \times \sin x \leqslant \frac{1}{2}$

2) De la même façon, en développant $(\cos x + \sin x)^2$, montrer que :
$-\cos x \times \sin x \leqslant \frac{1}{2}$

3) En déduire que pour tout réel x , on a :
$-\frac{1}{2} \leqslant \cos x \times \sin x \leqslant \frac{1}{2}$

L'équation $\cos x \times \sin x = 1$ a-t-elle une solution ?

<u>Ex 3-25 :</u> Inéquation

Dans chacun des cas suivants, dessiner en rouge sur un cercle trigonométrique, l'ensemble de tous les points associés à α , puis utiliser la représentation pour résoudre l'inéquation proposée dans l'intervalle donné.

1) $\cos(\alpha) < \frac{1}{2}$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

2) $\cos(\alpha) < \frac{1}{2}$ et $\alpha \in [0 ; 2\pi[$

3) $\sin(\alpha) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha \in]-\pi ; \pi]$

4) $\sin(\alpha) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha \in [0 ; 2\pi[$

Les fonctions sinus et cosinus

Ex 3-26 : Étudier la parité

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) + 3x^2$
1) Étudier la parité de f .

2) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère ?

Ex 3-27 : Étudier la parité

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin(x)$
1) Étudier la parité de f .

2) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f dans un repère ?

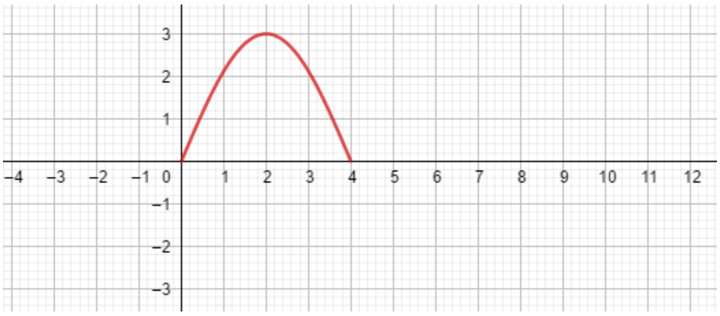
Ex 3-28 : Étudier la parité et la périodicité – compléter la courbe

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$
1) Vérifier que la fonction f est périodique de période 8.

2) Étudier la parité de f .

3) Quelles transformations permettent de tracer, dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-4 ; 12]$ à partir du tracé de f sur $[0 ; 4]$.

En déduire le tracé de f sur $[-4;12]$.



<u>Ex 3-29 :</u> Étudier la parité et la périodicité – retrouver la courbe

1) Pour chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, étudier la parité et la périodicité.

a) $f_1 : x \longmapsto \cos(2x)$

b) $f_2 : x \longmapsto 2\sin(x) - 1$

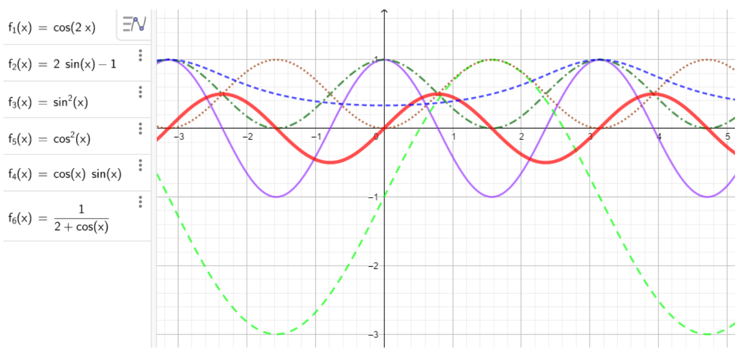
c) $f_3 : x \longmapsto \sin^2 x$

d) $f_4 : x \longmapsto \cos(x)\sin(x)$

e) $f_5 : x \longmapsto \cos^2 x$

f) $f_6 : x \longmapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$

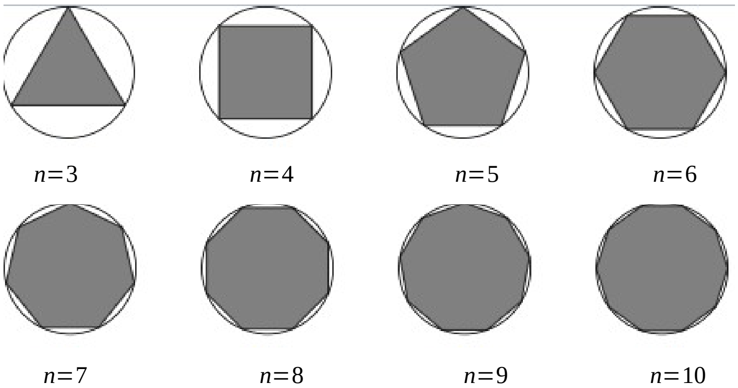
2) En utilisant les résultats précédents, associer chaque fonction à sa représentation graphique.



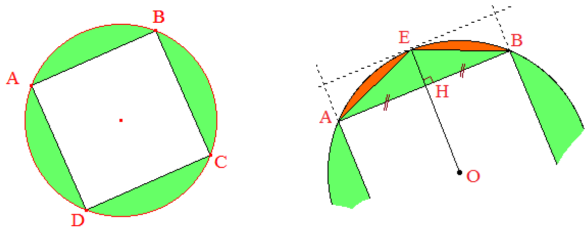
Algorithme-Python

Ex 3-30 : *Approximation de* π

La méthode d'Archimède permet d'approximer la valeur de π en utilisant des polygones réguliers inscrits dans le cercle.
L'idée est de considérer un cercle de rayon 1. Son périmètre est alors de 2π.
Si on trace un polygone régulier inscrit dans ce cercle, avec un nombre de coté suffisamment grand, son périmètre devrait alors être proche de la valeur 2π.



L'idée d'Archimède est de partir d'un polygone régulier (par exemple le carré) et trouver un lien entre le périmètre de ce polygone et celui d'un polygone qui aurait deux fois plus de coté et aurait un sommet sur deux en commun avec le polygone précédent.



Ainsi, si on part d'un carré, on va construire une suite de polygones ayant 4 cotés puis 8 puis 16... c'est à dire des puissances de 2.
On notera, c_n la longueur d'un côté du polygone régulier à 2^n cotés inscrits dans le cercle de rayon 1.

1) On considère le carrée et l'octogone de la figure ci-dessus.
On note c_2 la longueur AB et c_3 la longueur AE.

a) Exprimer AH en fonction de c_2 .

b) En utilisant le triangle AHO, exprimer OH en fonction de c_2 .

c) En utilisant le triangle AHE, exprimer AE^2 en fonction de c_2 .

d) En déduire que $c_3 = \sqrt{\frac{c_2^{\,2}}{4}+\left(1-\sqrt{1-\frac{c_2^{\,2}}{4}}\right)^2}$

En généralisant ce que nous venons de faire, on obtient la formule :

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{c_n^{\,2}}{4}+\left(1-\sqrt{1-\frac{c_n^{\,2}}{4}}\right)^2}$$

Faire bien attention aux différents pièges :

Le premier terme est $c_2=\sqrt{2}$ et le nombre de côtés est 2^n

2) Compléter le programme écrit en Python ci-dessous qui donne une approximation de π à 0,0001 près et le nombre de côtés du polygone correspondant.

```
from math import *
n= ...
c=...

while (.....................>0.0001):
    n=......
    c=sqrt((c**2)/4+(1-sqrt(1-(c**2)/4))**2)
    print("approximation de pi : ",..................,"obtenue avec",2**n,"côtés")
```

3) On peut aussi montrer que la mesure d'un côté d'un polygone à n côtés est aussi donnée par la formule $c_n=2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

a) Montrer cette formule.

b) Compléter le programme écrit en Python ci-dessous qui donne une approximation de π à 0,0001 près et le nombre de côtés du polygone correspondant en utilisant cette nouvelle formule.

```
from math import *
n=2
c=.....................
while (pi-c*2**(n-1)>0.001):
    n=...............
    c=...............
    print("approximation de pi : ",c*2**(n-1),"obtenue avec",.........,"côtés")
```