Conditionnement : maîtriser le cours

Ex 2-1 : Différentes expressions de $P(A\cap B)$

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle d'un univers Ω .
Quelles sont les différentes manières de calculer $P(A\cap B)$?

Ex 2-2 : Vrai ou faux

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle d'un univers Ω .
Répondre vrai ou faux pour chacune des questions ci-dessous :

1)	$P(A)+P(\overline{A})=1$	
2)	$P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})=P(B)$	
3)	$P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(B)$	
4)	Si $A\cup B=\Omega$ alors $P(A)=1-P(B)$	
5)	Si $A\cap B=\emptyset$ alors $P(A)=1-P(B)$	
6)	$P_B(A)=P(A)P(\overline{A}\cap B)$	
7)	$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_B(\overline{A})$	
8)	$P(\overline{A}\cap B)=P(A)\times P_B(A)$	
9)	$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P(B)$	
10)	$P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$	
11)	$P(A)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$	
12)	$P(A)=P_A(B)+P_A(\overline{B})$	
13)	Si $P(A)=0,4$ et $P(B)=0,6$, alors $B=\overline{A}$	
14)	Si $P(A)=0,4$ et $P(B)=0,5$, alors $P(A\cap B)=0,2$	
15)	Si $P(A)=0,2$, $P_A(B)=0,3$ et $P_{\overline{A}}(B)=0,8$, alors $P(B)=0,7$	

2-3 : Tableau à double entrée

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .
Compléter le tableau ci-dessous :

$\cap$	A	$\overline{A}$	Total
B		0,14	0,2
$\overline{B}$			
Total		0,3	

En déduire : $P(A)$, $P(B)$, $P(\overline{A}\cap B)$, $P_B(A)$ et $P_A(B)$

Ex 2-4 : Utiliser la définition

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

1) On a $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$ et $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

Calculer $P_A(B)$, $P_B(A)$ et $P(A\cup B)$

2) On a maintenant $P(A)=\frac{1}{4}$, $P_A(B)=\frac{1}{3}$ et $P(A\cup B)=\frac{5}{12}$

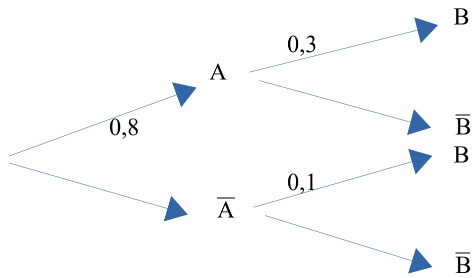
Calculer $P(A\cap B)$, $P(B)$ et $P_B(A)$.

En déduire $P(\overline{A}\cap B)$, $P_{\overline{A}}(B)$, $P(A\cap \overline{B})$ et $P_{\overline{B}}(A)$

Arbre, indépendance : maîtriser le cours

Ex 2-5 : Arbre

À partir de l'arbre , déterminer $P(A)$, $P_A(B)$, $P(A\cap B)$, $P(\overline{A}\cap B)$ et $P_A(\overline{B})$



Ex 2-6 : Vrai ou faux

Soit A et B deux événements d'un univers Ω . (de probabilités non nulles pour les questions 4 à 7) et **indépendants** pour les questions 8 à 11.
Répondre vrai ou faux pour chacune des questions ci-dessous :

1)	Si A et B sont incompatibles, alors ils sont indépendants.	
2)	Si A et B sont indépendants, alors ils sont incompatibles.	
3)	Si $P(A)=0$, alors A et B sont indépendants.	
4)	Si A et B sont indépendants, alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$	
5)	Si A et B sont indépendants, alors $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$	
6)	Si A et B sont indépendants, alors $P(A\cap B)=P_B(A)\times P_A(B)$	
7)	Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.	
8)	Si $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,6$, alors $P(A\cap B)=0,24$	
9)	Si $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,6$, alors $P(A\cup B)=0,72$	
10)	Si $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,4$, alors $P(\overline{A}\cap B)=0,28$	
11)	Si $P(A)=0,3$ et $P(B)=0,8$, alors $P(\overline{A}\cup B)=0,78$	

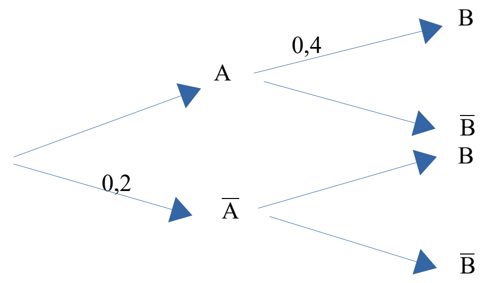
Ex 2-7 : Tableau à double entrée

Soit A et B deux événements indépendants d'un univers Ω .
Compléter le tableau ci-dessous :

$\cap$	A	$\overline{A}$	Total
B			0,2
$\overline{B}$			
Total		0,3	

Ex 2-8 : Arbre

Soit A et B deux événements indépendants d'un univers Ω . Compléter l'arbre ci-dessous :



Utiliser un arbre

Ex 2-9 : Hommes, femmes et lunettes

Dans une réunion, on compte 18 femmes et 24 hommes. 12 personnes portent des lunettes dont le quart sont des femmes.
On choisit une personne au hasard de la réunion.
On note A : « la personne choisie est un homme » et B : « la personne choisie porte des lunettes ».

1) Calculer $P(A)$ et $P(B)$

2) Représenter la situation à l'aide d'un arbre.

3) Les hypothèses connues permettent-elles de déterminer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$

Ex 2-10 : Pièces truquées et pièces équilibrées

Dans un lot de 100 pièces astérix de monnaie toutes de même apparence ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées.
La probabilité d'apparition de « FACE » lors d'un jet d'une pièce truquée est de $\frac{3}{4}$. La probabilité d'apparition de « FACE » lors d'un jet d'une pièce équilibrée est de $\frac{1}{2}$.
On prend une pièce au hasard dans ce lot et on la lance .
On note T : « la pièce est truquée » et F : « on obtient FACE »

1) Calculer la probabilité d'avoir pris une pièce truquée.

2) Faire un arbre illustrant la situation.

3) a) Calculer la probabilité d'obtenir une pièce truquée et de tomber sur FACE.

b) Calculer la probabilité de tomber sur FACE.

4) La pièce est tombée sur FACE . Quelle est la probabilité qu'elle soit truquée ?

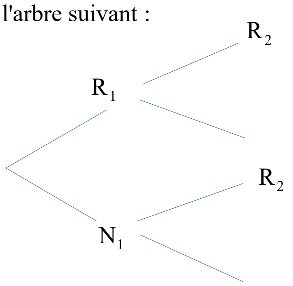
Ex 2-11 : Boules rouges et boules noires

Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules noires.
1) On tire au hasard une boule de l'urne . Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?

2) On tire au hasard une deuxième boule de l'urne sans avoir remis la première.
a) Si la première boule tirée est rouge, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage ?

b) Si la première boule tirée est noire, quelle est la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage ?

c) Compléter l'arbre suivant :



d) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ? Deux boules rouges ? Deux boules de la même couleur ?

e) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au deuxième tirage ?

f) Sachant que la deuxième boule est noire, quelle est la probabilité d'avoir obtenu une boule rouge au premier tirage ?

<u>Ex 2-12 :</u> En âge de voter ...

Dans un lycée, 50 % des élèves en âge de voter en 2018 sont en TES, 30 % en TL et les autres en TS.
Lors du vote, le taux d'abstention a été de 10 % chez les élèves de TES, 30 % chez ceux de TL et 15 % chez ceux de TS.
On choisit au hasard un élève en âge de voter.

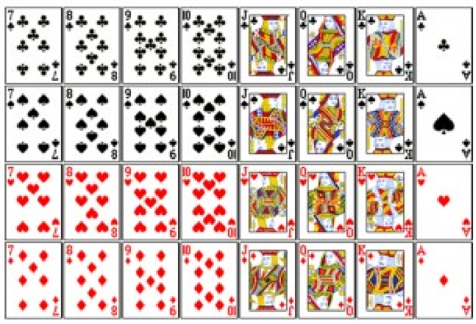
1) Quelle est la probabilité qu'il soit en S et qu'il ait voté ?

2) Quelle est la probabilité qu'il ait voté ?

<u>Utiliser la notion d'indépendance</u>

<u>Ex 2-13 :</u> Événement indépendants ?

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.
On considère les événements A: « la carte tirée est un Roi » et B : « la carte tirée est un Pique »
Les événement A et B sont-ils indépendants ?



Ex 2-14 : Loteries

Pierre participe à deux loteries . Pour la première, la probabilité de gagner est de $\frac{1}{3}$ et pour la deuxième la probabilité de gagner est de $\frac{1}{4}$.
Les événements G_1 : « gagner à la première loterie » et G_2 : « gagner à le deuxième loterie » sont indépendants.
Quelle est la probabilité que Pierre :

1) gagne aux deux loteries ?

2) gagne seulement à la première loterie ?

3) ne gagne à aucune des loteries ?

Ex 2-15 :

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article .
Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02.
Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants.
Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.
Calculer la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux.

Épreuves indépendantes

Ex 2-16 : QCM

On lance deux fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotés de 1 à 6.
On note les numéros obtenus. Dans chaque cas choisir la bonne réponse.
1) La probabilité d'obtenir un double 6 est :

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{30}$

2) La probabilité d'obtenir un 5 et un 6 est égale à :

a) $\frac{2}{36}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{15}$

3) La probabilité d'obtenir 6 au second lancer est égale à :

a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{5}{36}$ c $\frac{1}{6}$

Ex 2-17 : Feux tricolores

Sur le trajet d'un automobiliste, se trouvent deux feux tricolores de circulation fonctionnant de manière indépendante.
Le cycle de chacun est réglé de la manière suivante :

vert : 35s **orange** : 5s **rouge** : 20s

Calculer la probabilité que l'automobiliste croise un feu vert et un feu orange.

Ex 2-18 : Licenciés d'un club

Ci-dessous, on a représenté dans un tableau la répartition des licenciés d'un club de sport.

	Jeune	Adulte	Total
Homme	34	46	80
Femme	68	92	160
Total	102	138	240

1) On prélève au hasard la fiche de l'un des licenciés.
On considère les événements :
F : « Le licencié est une femme » et A : « Le licencié est un adulte »
Justifier que les événements A et F sont indépendants.

2) On prélève désormais, au hasard, successivement et avec remise, deux fiches des licenciés.
Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins un jeune homme parmi ces deux fiches.

Ex 2-19 : Épreuves différentes indépendantes : deux urnes

On dispose de deux urnes U1 et U2.
L'urne U1 contient 3 boules rouges, 2 boules noires et 5 boules vertes.
L'urne U2 contient 4 boules rouges, 4 boules noires et 2 boules vertes.
L'expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et de noter leur couleur . Les tirages sont indépendants.
On appelle R_i, V_i et N_i les événements : on tire une boule respectivement Rouge, Verte, Noire de l'urne U_i, pour $i=1$ ou $i=2$.

Déterminer la probabilité que les deux boules soient de la même couleur.

Ex 2-20 : Trois répétitions : pièce équilibrée

On dispose d'une pièce parfaitement équilibrée et on la jette successivement trois fois.
On appelle A l'événement « obtenir pile au premier jet » , B l'événement « obtenir face au deuxième jet » et C l'événement « obtenir face au troisième jet ».

1) Les événements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ?

2) Trouver la probabilité de l'événement $A \cap B \cap C$

Algorithme – Python

Ex 2-21 : Simuler un tirage sans remise dans une urne

Une urne contient 8 bulletins verts et 6 bulletins bleus.
Camil a écrit la fonction Urne en Python ci dessous :

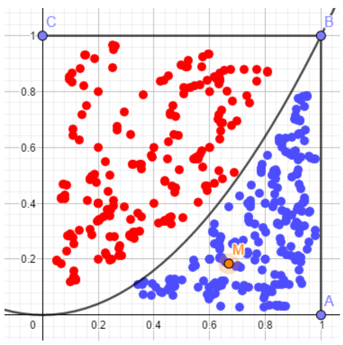
```
from random import randint
def Urne():
    tirage=[]
    for i in range(2):
        if randint(1,14)<=6:
            tirage.append("bleu")
        else:
            tirage.append("vert")
    return(tirage)
```

1) Que renvoie cette fonction ?

2) Quelle est la probabilité que cette fonction renvoie le couple ['bleu', 'bleu'] ?

3) Modifier cette fonction pour qu'elle renvoie le nombre de bulletins bleus obtenus lors de deux tirages sans remise de l'urne.

Ex 2-22 : Méthode de Monte Carlo



On a représenté ci-contre un carré OABC et la fonction carrée.
On se propose de donner une valeur approchée de l'aire du domaine *D* délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées , la droite d'équation $x = 1$ et la parabole en utilisant la loi des grands nombres.

1) On choisit au hasard un point dans le carré OABC et on regarde s'il est dans le domaine *D*.

La probabilite qu'il se trouve dans le domaine *D* est : $p = \dfrac{\text{aire de } D}{\text{aire de OABC}}$

a) Quelles conditions vérifient les coordonnées $(x\,;y)$ d'un point M situé :
- dans OABC

- dans le domaine *D*

b) Quelle est l'aire de OABC ?

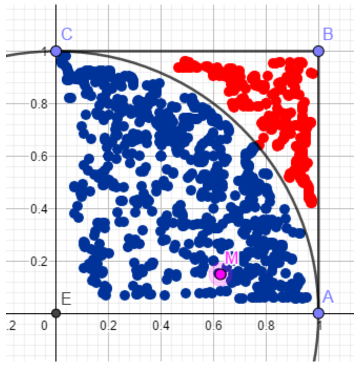
2) a) Compléter cet algorithme simulant 1000 fois l'expérience aléatoire, puis le traduire en Python.

```
c ← ...
Pour k allant de 1 à …
    x ← un nombre réel compris entre …
    y ← un nombre réel compris entre …
    Si  …            alors c ← c+1
    Fin Si
Fin Pour
p ← ...
```

b) Justifier qu'en exécutant ce programme, on obtient une valeur approchée de l'aire de *D*.

c) Comment obtenir une meilleure approximation ?

Une approximation de π :



3) On considère le quart de disque, noté *D*, de centre O et de rayon 1, situé dans le carré OABC . On choisit à nouveau au hasard un point dans le carré OABC et on regarde s'il est dans le domaine *D*.

a) Quelle est la probabilité que le point soit dans *D ?*

b) Quelle condition la longueur OM doit vérifier pour que le point M soit dans *D* ?

c) On simule 1000 fois l'expérience aléatoire. Écrire en python un programme permettant d'obtenir une valeur approchée de π .

Sur l'ensemble du chapitre

Ex 2-23 : ***Probabilités conditionnelles avec deux urnes***

On considère une urne A contenant trois boules jaunes et sept boules bleues et une urne B contenant quatre boules vertes, deux boules rouges et deux boules jaunes . Les boules sont toutes indiscernables au toucher.

On choisit au hasard de manière équiprobable une urne, puis on tire une boule dans cette urne. On s'intéresse à la couleur de la boule tirée.

1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

2) Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?

3) Déterminer la probabilité de l'événement J : «Obtenir une boule Jaune »

4) Sachant que l'on a obtenu une boule jaune, quelle est la probabilité que la boule provienne de l'urne A ?

5) Combien faudrait-il ajouter de boules vertes dans l'urne B pour avoir $P(J)=0,2$?

Ex 2-24 : ***Evénements indépendants***

Dans une urne sont placés 100 jetons jaunes dont 50 portent le numéro 0 et 50 portent le numéro 1.
On ajoute dans dans cette urne 30 jetons rouges numérotés 0.
Combien de jetons rouges numérotés 1 faut-il ajouter dans l'urne pour que les événements J: « le jeton est jaune » et Z: « le jeton est numéroté 0» soient indépendants lors d'un tirage au hasard d'un jeton de cette urne ?

Aide : on note x le nombre de de jetons rouges à ajouter.