

SECOND DEGRÉ

1) TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

A) DÉFINITION

Définition :

On appelle fonction **polynôme du second degré**, ou **trinôme du second degré** toute fonction définie sur \mathbb{R} qui peut s'écrire sous la forme :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels et } a \neq 0.$$

- On dit que a est le coefficient de x^2 , b le coefficient de x et c le terme constant.
- Un polynôme du second degré est toujours défini sur \mathbb{R} ; il n'est donc pas nécessaire de le répéter systématiquement.

Exemples :

- Les fonctions suivantes définies sur \mathbb{R} sont des trinômes du second degré :

$$x \mapsto 3x^2 + 2x + 3; \quad x \mapsto 4x^2 \quad \text{et} \quad x \mapsto 6x^2 - 2.$$

- La fonction $x \mapsto (x+1)^2 - (x-1)^2$ n'est pas un trinôme du second degré car pour tout réel x , $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$.

B) FORME CANONIQUE (retenir la méthode)

Propriété :

Tout trinôme du second degré $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous **forme canonique** :

$$f: x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha).$$

On note souvent P ou Q un trinôme du second degré.
(Notation que j'utiliserai en exercice)

Preuve :

Soit un trinôme du second degré f tel que $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Comme $a \neq 0$, pour tout réel x : $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.

Or $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

Remarque : le réel $b^2 - 4ac$ se note Δ (delta) et s'appelle **le discriminant du trinôme**.

Exemple : Forme canonique de $2x^2 + 4x + 1$

$$\text{Pour tout réel } x, \text{ on a : } 2x^2 + 4x + 1 = 2\left(x^2 + 2x + \frac{1}{2}\right) = 2\left((x+1)^2 - 1 + \frac{1}{2}\right) = 2\left((x+1)^2 - \frac{1}{2}\right) = 2(x+1)^2 - 1$$

C) VARIATIONS ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Étude d'un exemple : Variations de $f: x \mapsto 2x^2 + 4x + 1$

On a vu que pour tout réel x , $f(x) = 2(x+1)^2 - 1$

Soit deux réels u et v tels que $u < v \leq -1$. On a alors :

$$\begin{aligned} u+1 &< v+1 \leq 0 \\ \Rightarrow (v+1)^2 &< (u+1)^2 \quad (\text{car la fonction carrée est décroissante sur } \mathbb{R}^-) \\ \Rightarrow 2(v+1)^2 &< 2(u+1)^2 \\ \Rightarrow 2(v+1)^2 - 1 &< 2(u+1)^2 - 1 \\ \Rightarrow f(v) &< f(u) \end{aligned}$$

La fonction f est donc décroissante sur $]-\infty; -1]$

Soit deux réels u et v tels que $-1 \leq u < v$. On a alors :

$$\begin{aligned} 0 &\leq u+1 < v+1 \\ \Rightarrow (u+1)^2 &< (v+1)^2 \quad (\text{car la fonction carrée est croissante sur } \mathbb{R}^+) \\ \Rightarrow 2(u+1)^2 &< 2(v+1)^2 \\ \Rightarrow 2(u+1)^2 - 1 &< 2(v+1)^2 - 1 \\ \Rightarrow f(u) &< f(v) \end{aligned}$$

La fonction f est donc croissante sur $[-1; +\infty[$

En généralisant ce raisonnement à un trinôme quelconque $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ que nous démontrerons plus tard de manière plus simple, on obtient le résultat suivant :

$$a > 0$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f			

Les branches de la parabole sont dirigées vers le haut.

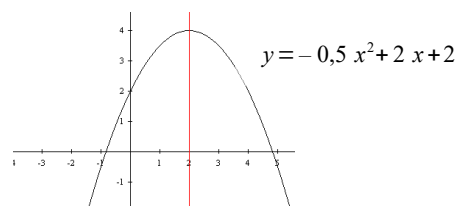
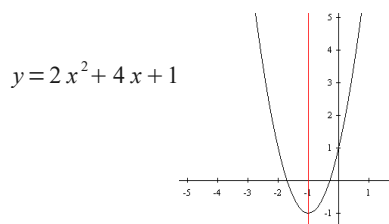
$$a < 0$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f			

Les branches de la parabole sont dirigées vers le bas.

Remarques :

- La représentation graphique dans un repère orthogonal est une parabole, dont le sommet est $S\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$, c'est à dire $S(\alpha, \beta)$
- La droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de la parabole.



2) ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ ET FACTORISATION

A) DÉFINITION

Définition :

Une **équation du second degré à une inconnue x** est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels et } a \neq 0)$$

Soit le trinôme du second degré $f : x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$ ($a \neq 0$)

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ s'écrit aussi $f(x) = 0$.

Résoudre cette équation dans \mathbb{R} , c'est trouver tous les réels u qui vérifient $f(u) = 0$. Ces solutions sont appelées **racines** du trinôme f .

B) RÉSOLUTION

$a \neq 0$, donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Il y a alors **3 cas distincts qui dépendent du signe du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$** .

Si $\Delta < 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ et alors l'équation n'a pas de solution dans \mathbb{R} , puisqu'un carré n'est jamais négatif.

Si $\Delta = 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ et l'équation équivaut alors à : $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

L'équation a donc une unique solution dans \mathbb{R} : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Si $\Delta > 0$, $\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et l'équation équivaut alors à :

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

L'équation a donc deux solutions distinctes dans \mathbb{R} : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemples : Résoudre les équations ci-dessous

- $x^2 - 3x + 4 = 0$ ($a = 1$; $b = -3$ et $c = 4$)

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7, \Delta < 0, \text{ donc le trinôme } x^2 - 3x + 4 \text{ n'a pas de racine.}$$

L'équation n'a donc pas de solution dans \mathbb{R} : $S = \emptyset$.

- $2x^2 - 12x + 18 = 0$ ($a = 2$; $b = -12$ et $c = 18$)

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0, \Delta = 0 \text{ donc le trinôme } 2x^2 - 12x + 18 \text{ a une seule racine: } x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \times 2} = 3.$$

L'équation a donc une unique solution dans \mathbb{R} : $S = \{3\}$.

- $6x^2 - x - 1 = 0$ ($a = 6$; $b = -1$ et $c = -1$)

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 1 + 24 = 25 = 5^2, \Delta > 0 \text{ donc le trinôme } 6x^2 - x - 1 \text{ a deux racines:}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{2 \times 6} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{2 \times 6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

L'équation a donc deux solutions dans \mathbb{R} : $S = \left\{ -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right\}$

Remarques :

- Il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant. **Exemples :** $4x^2 - 9 = 0$, $5x^2 - 4x = 0$, ...
- Lorsque a et c sont de signes contraires $-4ac > 0$ donc $\Delta > 0$ et l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes.

On montre facilement la propriété suivante :

Propriété :

Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines x_1 et x_2 , alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Applications :

- Vérifier le calcul des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
- Trouver une racine connaissant l'autre. (**Méthode de la racine évidente**)

Exemple : $x_1 = 1$ est une solution évidente de $2x^2 - 5x + 3 = 0$, donc l'autre racine vérifie $x_1 x_2 = \frac{3}{2}$ et donc $x_2 = \frac{3}{2}$

- Déterminer le signe des racines sans en connaître les valeurs.

Remarque : Deux nombres réels ont pour produit P et pour somme S si, et seulement si, ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

C) FACTORISATION DU TRINÔME $ax^2 + bx + c$

On a déjà montré que pour tout réel x de \mathbb{R} : $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$. Trois cas se présentent donc :

Si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine, il est donc inutile d'espérer factoriser ce trinôme en produit de polynômes du premier degré.

Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ et $x_0 = -\frac{b}{2a}$ est **la racine double** du trinôme.

Si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.

Exemples : Factoriser les trinômes ci-dessous

- $x^2 - 3x + 4$ n'est pas factorisable.
- $2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$ (ce qui aurait pu se déterminer grâce aux identités remarquables...)
- $6x^2 - x - 1 = 6 \left(x + \frac{1}{3} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) = (3x + 1)(2x - 1)$

3) SIGNE DU TRINÔME $ax^2 + bx + c$

→ Si $\Delta > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
On a :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$x - x_1$	—	0	+	+
$x - x_2$	—	—	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	—	+

si $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$a(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	—	+

si $a < 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$a(x - x_1)(x - x_2)$	—	0	+	—

Pour résumer : $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre ses racines.

→ Si $\Delta \leq 0$, on a $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ (forme canonique).

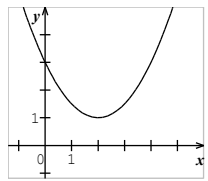
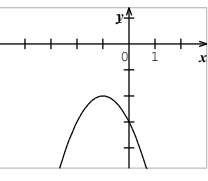
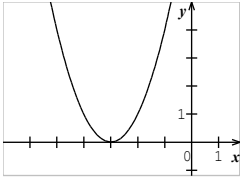
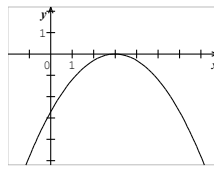
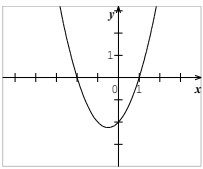
- Si $\Delta < 0$, $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ et donc $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x .
- Si $\Delta = 0$, $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ et $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ donc $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x \neq -\frac{b}{2a}$ et $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $f(x) < 0$ avec $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = 49$ ($\Delta > 0$) ; les solutions de l'équation $2x^2 + 5x - 3 = 0$ sont donc $x_1 = -3$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

Or $f(x)$ est du signe de $a = 2$ sauf entre les racines. Ainsi l'ensemble des solutions est $S =]-3 ; \frac{1}{2}[$

4) RÉCAPITULATIF ET LIENS AVEC LES REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

	Équation $ax^2 + bx + c = 0$ Factorisation	Inéquation $ax^2 + bx + c > 0$	Inéquation $ax^2 + bx + c < 0$	
$\Delta < 0$	L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R}	Si $a > 0$ L'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$ a pour ensemble de solutions l'ensemble \mathbb{R} .	Si $a > 0$ L'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} .	
	Le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas	Si $a < 0$ L'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} .	Si $a < 0$ L'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$ a pour ensemble de solutions l'ensemble \mathbb{R}	
$\Delta = 0$	L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une solution (double) dans \mathbb{R} . Cette solution est: $x_0 = -\frac{b}{2a}$	Si $a > 0$ L'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$ a pour ensemble de solutions l'ensemble \mathbb{R} privé de x_0 .	Si $a > 0$ L'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} .	
	Le trinôme $ax^2 + bx + c$ se factorise: $a(x - x_0)^2$	Si $a < 0$ L'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} .	Si $a < 0$ L'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$ a pour ensemble de solutions l'ensemble \mathbb{R} privé de x_0 .	
$\Delta > 0$	L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes dans \mathbb{R} . Ces solutions sont: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	Si $a > 0$ L'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$ a pour ensemble de solutions $] -\infty ; x_1[\cup] x_2 ; +\infty [$	Si $a > 0$ L'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$ a pour ensemble de solutions $] x_1 ; x_2 [$	
	Le trinôme $ax^2 + bx + c$ se factorise : $a(x - x_1)(x - x_2)$	Si $a < 0$ L'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$ a pour ensemble de solutions $] x_1 ; x_2 [$	Si $a < 0$ L'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$ a pour ensemble de solutions $] -\infty ; x_1[\cup] x_2 ; +\infty [$	