Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Droites

Ex 11-1 : Restituer les notions du cours

1) Donner un vecteur orthogonal au vecteur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

2) Donner un vecteur directeur de la droite d'équation $y=-3x+2$.

3) Donner un vecteur normal à la droite d'équation $2x-5y+3=0$.

4) $\vec{j}$ est-il un vecteur directeur de la droite d'équation $y=4$?

5) La droite d'équation $4x-3y+2=0$ est perpendiculaire à une certaine droite d. Donner un vecteur directeur de d.

6) Dire à chaque fois, s'il s'agit d'un vecteur directeur, d'un vecteur normal, ou d'un vecteur qui n'est ni directeur, ni normal à la droite d'équation $5x-3y+7=0$.

$u_1\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$

$u_2\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$

$u_3\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$

$u_4\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$

$u_5\begin{pmatrix}6\\10\end{pmatrix}$

$u_6\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$

Ex 11-2 : Déterminer des équations de droites perpendiculaires

1) Écrire une équation de la droite d_1 passant par $A(-3;2)$ et de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$.

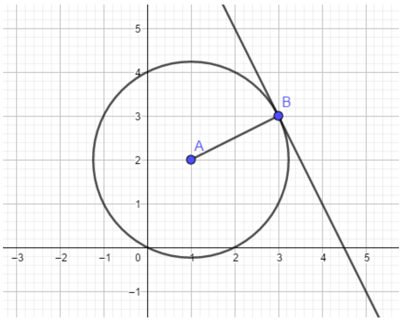
2) Écrire une équation de la droite d_2 passant par $B(5;-6)$ et perpendiculaire à la droite $\Delta_1: 3x+5y-7=0$.

3) Écrire une équation de la droite d_3 passant par $C(2;7)$ et perpendiculaire à la droite $(O;\vec{i})$.

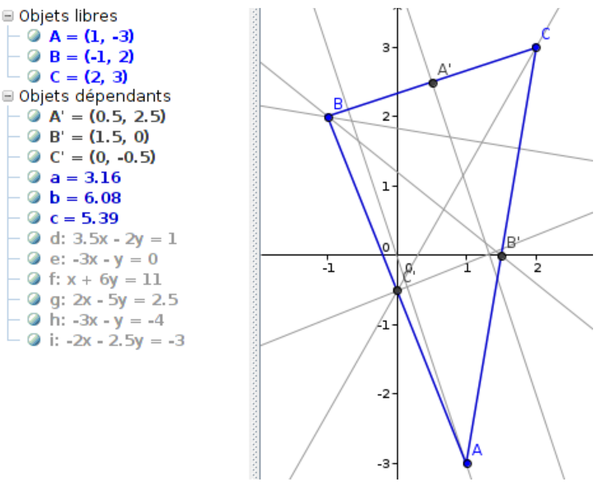
Ex 11-3 : Tangente à un cercle

Le cercle *C* a pour centre A(1;2) et passe par le point B(3;3).

Déterminer une équation de la droite *d* tangente au cercle *C* au point B.



Ex 11-4 : Droite d'Euler



1) a) Tracer en rouge les deux médianes du triangle ABC qui ont été représentées sur la figure . Associer à ces médianes leur équation.

b) Retrouver par le calcul l'équation de la médiane issue de C.

c) En déduire les coordonnées du point G, centre de gravité de ABC et placer G sur la figure.

2) a) Tracer en bleu les deux médiatrices du triangle ABC qui ont été représentées sur la figure . Associer à ces médiatrices leur équation.

b) Retrouver par le calcul l'équation de la médiatrice relative au côté [BC].

c) En déduire les coordonnées du point Ω , centre du cercle circonscrit de ABC et placer Ω sur la figure.

3) a) Tracer en vert les deux hauteurs du triangle ABC qui ont été représentées sur la figure . Associer à ces hauteurs leur équation.

b) En déduire les coordonnées du point H, orthocentre de ABC et placer H sur la figure.

4) Démontrer que G, H et Ω sont alignés.

Coordonnées du projeté orthogonal d'un point

Ex 11-5 : Méthode

On considère la droite d d'équation $-x+y+9=0$ et le point A(0;9).

1) Le point A appartient-il à la droite d ?

2) Donner un vecteur normal à la droite d .

3) Déterminer une équation de la droite d' perpendiculaire à la droite d et passant par A.

4) En résolvant un système, déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur d .

<u>Ex 11-6 :</u> Sans aide

On considère les points A(-2;2) , B(4;1) et C(-6;3).
Déterminer les coordonnées de H, le projeté orthogonal de C sur (AB).

<u>Ex 11-7 :</u> Coordonnées d'un point de projeté orthogonal connu

1) On considère la droite d_1 d'équation $x-7=0$.
Donner les coordonnées d'un point A n'appartenant pas à d_1 dont le projeté orthogonal de A sur d_1 est le point H(7;2).

2) On considère la droite d_2 d'équation $x-y+1=0$.
Donner les coordonnées d'un point B n'appartenant pas à d_2 dont le projeté orthogonal de B sur d_2 est le point H(2;3).

Ex 11-8 : Distance d'un point à une droite

Soit A(9;2) un point du plan et d la droite d'équation $-x+3y+13=0$.
1) a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur la droite d .

b) En déduire la longueur AH

2) a) Compléter le programme ci-dessous écrit en Python, afin qu'il calcule la distance entre un point de coordonnées $(u;v)$ et une droite d'équation $ax+by+c=0$.

Pour cette question, on utilise les formules de Cramer qui sont hors programme, mais très pratique pour l'écriture du programme.

Si $ad-bc\neq 0$, le système

$$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$$

a pour unique solution :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\frac{ed-bf}{ad-bc},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}=\frac{af-ec}{ad-bc}.$$

On note $mx+ny+p=0$ l'équation de la droite (AH).

```
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=float(input("c="))
u=float(input("u="))
v=float(input("v="))
if ( ...................... ):
   print("AH=0")
else:
   m=.........
   n= .........
   p= .........
   xH=(b*p-c*n)/(a*n-m*b)
   yH=(m*c-a*p)/(a*n-m*b)
   AH=.........
   print(AH)
```

b) Tester ce programme avec le point A et la droite d .

Cercles

Ex 11-9 : Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon

1) Donner une équation du cercle de centre (4;7) et de rayon 3.

2) Donner une équation du cercle de centre (-2;0) et de rayon 5.

Ex 11-10 : Équation d'un cercle défini par son diamètre

Donner une équation du cercle C de diamètre [EF] où E(3;5) et F(-4;2).

Ex 11-11 : Reconnaître l'équation d'un cercle.

1) Dire à chaque fois si l'équation donnée est l'équation d'un cercle . Dans l'affirmative, préciser son centre et son rayon.

a) $x^2+y^2-5x+3y=-1$

b) $x^2+6x+y^2-4y+15=0$

c) $x^2+8x+y^2-4y+20=0$

d) $x^2+y^2-8x+y=-20$

e) $3x^2-4x+3y^2-6y-15=0$

f) $2x^2+4x+y^2-3y-8=0$

2) Déterminer les valeurs du réel k telles que l'équation $x^2+y^2-2x+6y=k$ soit l'équation d'un cercle.

3) Existe-t-il un réel a tel que l'équation $x^2+y^2-2ax+4y=20$ soit celle d'un cercle de rayon 7 ?
Dans l'affirmative, préciser les coordonnées de son centre.

4) Montrer que l'équation $x^2+y^2-2ax-2by=0$ (où $a\neq 0$ et $b\neq 0$) est toujours celle d'un cercle . Préciser son centre et son rayon.

<u>Ex 11-12 :</u> Déterminer l'équation d'un cercle tangent à une droite

Soit A(2;3) un point du plan et d la droite d'équation $x+y+1=0$.

1) En modifiant le programme de l'Ex 11-8 conjecturer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur d . Vérifier que le point obtenu est bien le projeté orthogonal.

2) Déterminer une équation du cercle de centre A tangent à la droite d .

Ex 11-13 : Cercle circonscrit

Soit A(-1;3), B(-2;5) et C(3;5).

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2) Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.
(c'est à dire passant par A, B et C)

Ex 11-14 : Position relative d'une droite et d'un cercle

Soit C le cercle d'équation $x^2+y^2-2x-6y+8=0$ et d_m la droite d'équation $mx-y+5=0$ (où m est un réel)

1) Déterminer le centre A et le rayon du cercle C.

2) Exprimer en fonction de m les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur la droite .

3) a) Montrer que $\mathrm{AH}^2=\frac{(m+2)^2}{m^2+1}$

b) En déduite la position relative de la droite d_m et du cercle C selon les valeurs de m .

Ensemble de points

Ex 11-15 : Ensemble de points : $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2=k$

Soit les points A(-2 ;-5) et B(2 ;-1).

1) Déterminer une équation du cercle C de diamètre $[\mathrm{AB}]$.

2) a) Prouver que le point O n'appartient pas à C .

b) Déterminer les coordonnées exactes des points d'intersection de C et de l'axe des ordonnées.

c) Démontrer que C ne coupe pas l'axe des abscisses.

3) Soit E l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y)$ du plan tels qu $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2=32$
Exprimer $\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2$ en fonction de x et y, puis en déduire la nature de l'ensemble E.

Ex 11-16 : Ensemble de points : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=k$ et $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$

Soit les points A(-1;2) et B(3;-1).
On veut déterminer l'ensemble E des points M tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$

1) Soit E l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y)$ du plan tels que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=-1$
Montrer que E est une droite dont on donnera une équation.

2) Soit F l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y)$ du plan tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-1$
Montrer que F est un cercle dont on précisera le centre et le rayon

Ex 11-17 : Ensemble de points : $\frac{\text{MA}}{\text{MB}}=k$

Soit A(1;2) et B(2 ;-1) deux points du plan.

On note E l'ensemble des points $\text{M}(x;y)$ du plan tels que $\frac{\text{MA}}{\text{MB}}=2$

1) Montrer que M ∈ E si et seulement si $\text{MA}^2-4\,\text{MB}^2=0$

2) Démontrer que les coordonnées de $\text{M}(x;y)$ vérifient l'équation :

$x^2+y^2-\frac{14}{3}x+4y+5=0$

3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble E.

Ex 11-18 : Ensemble de points équidistants d'un point et de (Ox)

Soit le point F(0;4).

On note E l'ensemble des points $\text{M}(x;y)$ du plan équidistants du point F et de l'axe des abscisses.

1) Exprimer le carré de la distance *d* du point M à l'axe des abscisses.

2) Exprimer le carré de la distance MF.

3) En déduire l'équation de l'ensemble E.