Définition - propriétés algébriques

Ex 10-1 : QCM

Plusieurs réponses sont possibles.

1) La fonction exp :

a) s'annule en 0

b) s'annule en 1

c) est égale à sa dérivée

d) est l'unique fonction f telle que $f'=f$

2)

a) $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$

b) $\exp\left(\frac{1}{a}\right)=-\exp(a)$

c) $\exp\left(\frac{a}{b}\right)=\exp(a)-\exp(b)$

d) $\exp(a)^4=\exp(4a)$

3) Le nombre $\exp\left(5+\frac{1}{5}\right)$ est égal à :

a) $\frac{\exp(26)}{\exp(5)}$

b) $\exp(26)-\exp(5)$

c) $-\exp(5^2)$

d) $\exp(5)\times\exp\left(\frac{1}{5}\right)$

Ex 10-2 : Vrai ou faux - Logique

1) (P1) : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)>0$

2) (P2) : $\exists x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)=0$

3) (P3) : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)\neq 0$

4) (P4) : $\exists x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)\neq 0$

5) (P3) est la négation de (P4)

6) (P3) est la négation de (P2)

Ex 10-3 : Les deux conditions : (P1) : $f'=f$ et (P2) : $f(0)=1$

1) Dans chaque cas, indiquer si la fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifie les propriétés (P1) : $f'=f$ et (P2) : $f(0)=1$

a) $f(x)=x+1$

b) $f(x)=1$

c) $f(x)=0$

d) $f(x)=2\exp(x)$

2) Donner toutes les fonctions f qui vérifient (P1).

3) Donner une fonction f qui vérifie (P1) et (P2).

4) En existe-t-il d'autres ?

La notation e^x

Ex 10-4 : Calculs

Simplifier les expressions suivantes :

1) $e^4\times e^7\times e^{-2}$

2) $e\times(e^2)^5$

3) $\frac{e^{-0,5}\times e^3}{e^{-1,7}}$

4) $\frac{e^3\times e^{-1}}{e^{-3}}\times\frac{1}{e^{-4}}$

5) $e^{-x}(e^x)^5$

6) $\frac{e^{3x}e^{2x}}{2e^x}$

7) $\frac{e^{3x}+e^x}{e^x}$

8) $\left(e^{-3x}-1\right)^2-\left(e^{-3x}+1\right)^2$

Ex 10-5 : Cosinus hyperbolique – sinus hyperbolique

Soit les fonctions ch et sh définies par :

$$\text{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

Montrer que pour tout réel x :

$\text{ch}^2 x-\text{sh}^2 x=1$ et $\text{ch}(2x)=\text{ch}^2 x+\text{sh}^2 x$

Ex 10-6 : Suites géométriques

Dans chaque cas, montrer que (u_n) est une suite géométrique.
Préciser la raison et le 1er terme.

1) $u_n=e^{4n}$

2) $u_n=3e^{\frac{n}{2}}$

3) $u_n=\frac{e^{n+3}}{5}$

4) $u_n=\frac{3e}{e^{n+1}}$

Ex 10-7 : Fonction impaire

Soit $f: x \longmapsto \frac{(2x-1)e^x-2x-1}{e^x-1}$ et C_f la courbe représentative de f .

1) Déterminer l'ensemble de définition de f .

2) Montrer que C_f est symétrique par rapport à l'origine du repère.
Remarque : On dit que f est une fonction impaire.

Ex 10-8 : Vrai ou faux : justifier

1) Pour tous réels a et b , $e^{a+b}=\sqrt{e^{2a}\times e^{2b}}$

2) Pour tous réels a et b , $2e^{a+b}=e^{2a}+e^{2b}$

3) Il existe un réel a et un réel b , tels que $2e^{a+b}=e^{2a}+e^{2b}$

4) Il existe un réel a et un réel b , tels que $e^{2a}+e^{2b}<2e^{a+b}$

Ex 10-9 : Dérivées

Dans chacun des cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x)=4x^3-2e^x$

2) $f(x)=-xe^x$

3) $f(x)=(4x-1)e^x$

4) $f(x)=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^x}$

5) $f(x)=\frac{2}{3e^x+2}$

6) $f(x)=\frac{2-3e^x}{1+e^x}$

Étude de fonctions comportant la fonction exponentielle

Ex 10-10 : Variations

Dans chacun des cas, déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

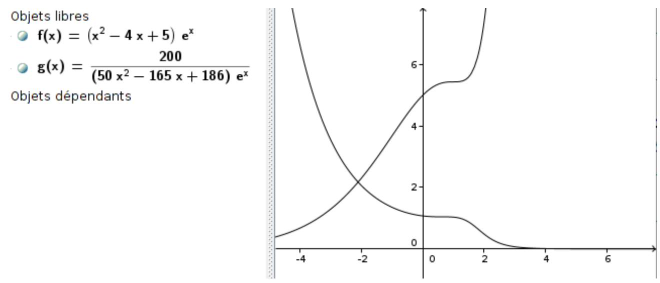
1) $f : x \longmapsto 4-3x-4e^{x}$

2) $f : x \longmapsto (x^2-x+1)e^{x}$

3) $f : x \longmapsto 2-x+\dfrac{4}{e^{x}+1}$

4) $f : x \longmapsto \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$

Ex 10-11 : Attention aux apparences



1) Associer chaque fonction à sa représentation graphique.

2) f est-elle croissante sur $\mathbb{R}$?

3) g est-elle décroissante sur $\mathbb{R}$?

Résoudre des équation et des inéquations

Ex 10-12 : Équations et inéquations

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous :

1) $e^x + e = 0$

2) $(e - e^x)^2 = 0$

3) $e^3 - e^x \leqslant 0$

4) $(e^x - e^2)(e^x - e) > 0$

Ex 10-13 : Ensembles de définition

Déterminer dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction f :

1) $f(x) = e^{x^2 - 2x + 1}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$

3) $f(x) = \dfrac{5e^x - 1}{e^x - e^{-x}}$

4) $f(x)=\sqrt{1-\mathrm{e}^{3x}}$

Étude de fonctions comportant une fonction du type $x \longmapsto \mathrm{e}^{ax+b}$

Ex 10-14 : Dérivées

Dans chacun des cas, déterminer la fonction dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1) $f(x)=3\mathrm{e}^{2x}+x$

2) $f(x)=(3x+1)\mathrm{e}^{-0,1x}$

3) $f(x)=-\frac{3}{7}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$

4) $f(x)=\frac{2+\mathrm{e}^{3x+1}}{\mathrm{e}^{-2x}}$

Ex 10-15 : Variations

Dans chacun des cas, déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

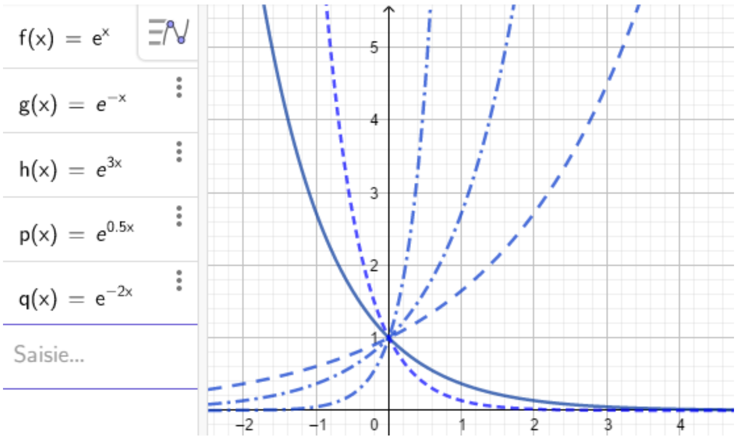
1) $f : x \longmapsto 5\mathrm{e}^{-2x}+5$

2) $f : x \longmapsto (3x-1)\mathrm{e}^{3x+1}$

3) $f : x \longmapsto (x^2-4)\mathrm{e}^{x+1}$

Représentations graphiques

Ex 10-16 : Associer chaque fonction avec sa représentation graphique

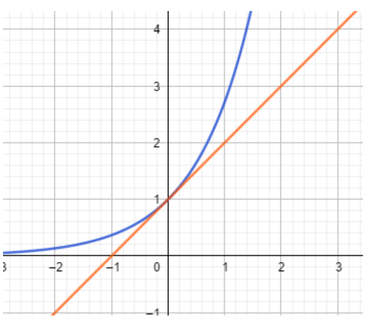


Ex 10-17 : Tangente en zéro et positions relatives

On considère la fonction exponentielle .

On note C sa courbe représentative et T la tangente à C au point d'abscisse 0.

1) Déterminer l'équation réduite de T.



2) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$

a) Déterminer le tableau de variations de f .

b) Quel est le minimum de f ?

c) En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que pour tout réel x , on a $1+x\leqslant \mathrm{e}^x$

b) Interpréter graphiquement le résultat.

<u>Ex 10-18 :</u> Bien utiliser la calculatrice

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x+10}{e^{3x}}$

Un élève s'appuyant sur la courbe représentative de la fonction obtenue sur sa calculatrice, affirme que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démontrer ou infirmer cette conjecture.

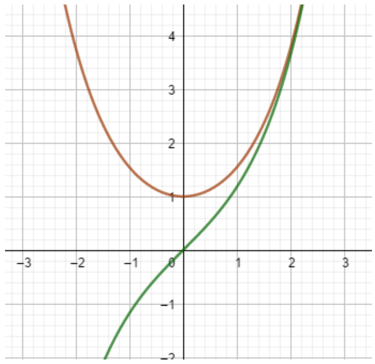
<u>Ex 10-19 :</u> Cosinus hyperbolique – sinus hyperbolique

Soit les fonctions ch et sh définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

1) a) Étudier la parité des fonctions ch et sh.

b) Associer chacune des fonctions à la courbe qui lui correspond.



2) a) Démontrer que pour tout réel x :

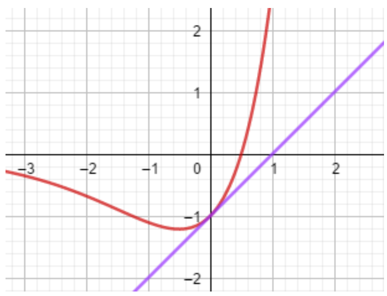
$$\mathrm{ch}'(x)=\mathrm{sh}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x)$$

b) Construire les tableaux de variations de ces deux fonctions

<u>Ex 10-20 :</u> Déterminer *a* et *b*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(ax+b)e^{x}$ où a et b sont deux réels . On note C sa courbe représentative et T la tangente au point d'abscisse 0.

1) Lire graphiquement la valeur de $f(0)$.



2) En déduire la valeur de b .

3) Lire graphiquement la valeur de $f\,'(0)$.

4) Calculer $f\,'(x)$ et en déduire la valeur de a .

Ex 10-21 : Méthode d'Euler

L'approximation par la méthode d'Euler consiste à approcher la courbe d'une fonction f par ses tangentes.

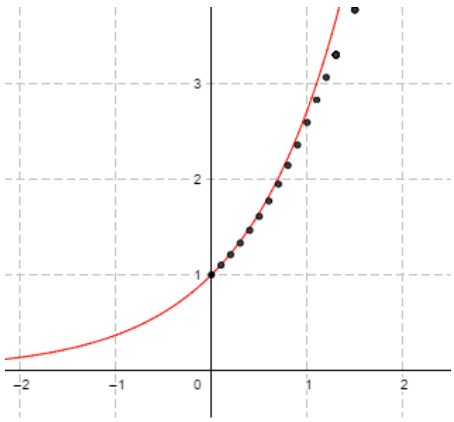
1) Montrer que l'ordonnée du point d'abscisse $a+h$ de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a est $f\,'(a)h+f(a)$

2) Quand h devient très petit, la courbe de la fonction f est très proche de sa tangente : elle semble presque se confondre.
Euler dit alors : $f(a+h)\approx f\,'(a)h+f(a)$
Appliquer cette approximation à la fonction exponentielle exp.

3) Déterminer une approximation de $\exp(a+2h)$, puis deviner une approximation de $\exp(a+3h)$.

4) Le raisonnement par récurrence, qui sera vu en terminale, permet à Euler de démontrer que $\exp(a+nh)\approx\exp(a)(1+h)^n$ pour de très petites valeurs de h et pour n entier naturel non nul.

On obtient ainsi une bonne approximation de la représentation graphique de la fonction exponentielle.



Pour $a=0$ et $h=\dfrac{1}{n}$, en déduire que $e\approx\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

5) En utilisant la fonction exp du module math, compléter l'algorithme ci-dessous écrit en python donnant le premier entier naturel n fournissant une valeur approchée de e avec une précision de 10^{-p} .

```
from math import exp
p=int(input("p="))
n=1
a=2
while abs((a-exp(1)))> … … …:
    n= … … …
    a= … … …
print(n)
print(a)
```

Tester cet algorithme et donner une expression sous la forme $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ fournissant une valeur approchée de e à 10^{-6} près.

Modélisation à l’aide d’une fonction exponentielle

Ex 10-22 : Évolution d’un population : croissance exponentielle

Au 1^{er} janvier 2018, un village comptait 1000 habitants . Pour tout entier naturel n , le nombre d’habitants u_n , en millier, n années après le 1^{er} janvier 2018 vérifie la relation : $u_{n+1}=u_n e^{0,02}$

1) a) Déterminer la nature de la suite (u_n) .

b) Donner l’expression explicite de (u_n) .

2) a) Que peut-on dire de la croissance de la population ?

b) Déterminer le nombre approximatif d’habitants au 1^{er} janvier 2028.

Ex 10-23 : Médicament dans le sang – Python

On injecte 4 mg d’un médicament dans le sang d’un patient, à l’instant $t=0$. On note $\mathrm{Q}(t)$ la quantité en mg de médicament présente dans le sang du patient à l’instant t exprimé en heure.
La vitesse d’élimination du médicament étant proportionnelle à la quantité présente dans le sang, on admet que la fonction Q vérifie la relation :

$$(\mathrm{E}) : Q'(t)=-0,248\,\mathrm{Q}(t)$$

1) Montrer que $\mathrm{Q}(t)=4\mathrm{e}^{-0,248t}$ vérifie la relation (E) ainsi que la condition initiale $\mathrm{Q}(0)=4$.

2) Calculer la quantité de médicament présente dans le sang au bout de deux heures.

3) Montrer que la quantité de médicament décroît au cours du temps.

4) Avec la calculatrice, tracer la courbe de la fonction Q .

5) On considère que le médicament est éliminé quand sa quantité dans le sang est inférieure à 0,001mg.
Avec la calculatrice déterminer au bout de combien de temps (arrondi au dixième d’heure) ce médicament est éliminé.

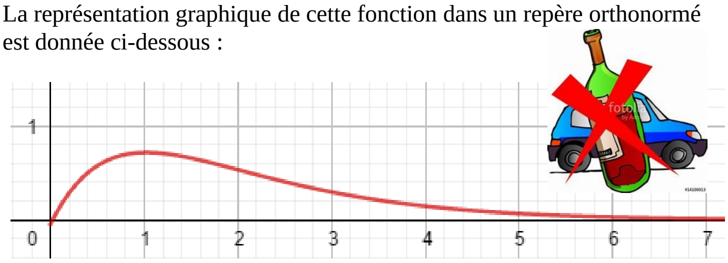
6) Écrire un programme en Python qui permet de retrouver le résultat de la question 5.

<u>Ex 10-24 :</u> Taux d'alcoolémie

Un étude sur un jeune homme de 64kg ayant ingéré une dose de 33g d'alcool a permis d'établir que le taux d'alcool dans le sang, en fonction du temps t en heure, est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$f(t)=(2t-0,05)e^{-t}$$

La représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous :



1) Avec la précision permise par le graphique, déterminer combien de temps après l'ingestion le taux d'alcool passe au-dessous du seuil de 0,25 $g.L^{-1}$

2) Un taux d'alcool dans le sang inférieur à 0,001 $g.L^{-1}$ est considéré comme négligeable.
En utilisant la calculatrice ou un programme écrit en python, déterminer à partir de combien de temps (à 10^{-2} près) le taux d'alcool dans le sang du jeune homme est négligeable ?

3) Déterminer le tableau de variation de f .

4) En déduire une valeur approchée au centième du taux maximum d'alcool dans le sang du jeune homme.

<u>Ex 10-25 :</u> Décroissance radioactive

On étudie une population de noyaux radioactifs de carbone 14 au cours du temps.
À l'instant $t=0$, la population est composée de N_0 noyaux radioactifs de carbone 14.
On modélise le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 à l'instant t , exprimé en milliers d'années, par la fonction N définie sur $[0;+\infty[$ par : $N(t)=N_0e^{-0,121t}$

1) Étudier les variations de la fonction N sur $[0;+\infty[$.

2) a) On appelle demi-vie du carbone 14 le temps T au bout duquel la population de noyaux radioactifs a diminué de moitié.
Justifier que $e^{-0,121T}=\dfrac{1}{2}$

b) Déterminer avec un programme écrit en python une valeur approchée au millième de la demi-vie T du carbone 14.

3) a) Démontrer que $N(2T)=\dfrac{N_0}{4}$

b) En déduire au bout de combien de temps le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 n'est plus égal qu'au quart de sa valeur initiale.