Devoir 4 correction :

:

Exercice 1 :

1) $u_1=\frac{5\times 2-1}{2+3}=\frac{9}{5}$ et $u_2=\frac{5\times\frac{9}{5}-1}{\frac{9}{5}+3}=\frac{8}{\frac{9}{5}+\frac{15}{5}}=\frac{8}{\frac{24}{5}}=8\left(\frac{5}{24}\right)=\frac{5}{3}$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{5u_n-1}{u_n+3}-u_n=\frac{5u_n-1}{u_n+3}-\frac{u_n(u_n+3)}{u_n+3}=\frac{5u_n-1-(u_n)^2-3u_n}{u_n+3}=\frac{-(u_n)^2+2u_n-1}{u_n+3}=-\frac{(u_n)^2-2u_n+1}{u_n+3}=-\frac{(u_n-1)^2}{u_n+3}\leqslant 0$$

La suite (u_n) est donc décroissante

3) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{u_{n+1}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-1}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{5u_n-1}{u_n+3}-\frac{u_n+3}{u_n+3}}-\frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{\frac{4u_n-4}{u_n+3}}-\frac{1}{u_n-1}$$

Donc $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3}{4u_n-4}-\frac{4}{4u_n-4}=\frac{u_n-1}{4(u_n-1)}=\frac{1}{4}$

Ainsi (v_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0=\frac{1}{u_0-1}=\frac{1}{2-1}=1$

Et $v_n=1+\frac{1}{4}n=\frac{n+4}{4}$

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $v_n=\frac{1}{u_n-1}$ $\Leftrightarrow$ $u_n-1=\frac{1}{v_n}$ $\Leftrightarrow$ $u_n=1+\frac{1}{v_n}=1+\frac{4}{n+4}$

4) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $S_n=(n+1)\frac{v_0+v_n}{2}=(n+1)\frac{1+\frac{n+4}{4}}{2}=(n+1)\frac{\frac{n+8}{4}}{2}=\frac{(n+1)(n+8)}{8}$

b)

```
def somme(n) :
    v=1
    s=v
    for i in range(1,n+1) :
        v=(i+4)/4
        s=s+v
    return s
```

Exercice 2 :

1) $u_1=\frac{1}{3}\times(-1)-2=-\frac{1}{3}-\frac{6}{3}=-\frac{7}{3}$ et $u_2=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{7}{3}\right)-2=-\frac{7}{9}-\frac{18}{9}=-\frac{25}{9}$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1}=u_{n+1}+3=\frac{1}{3}u_n-2+3=\frac{1}{3}u_n+1=\frac{1}{3}(u_n+3)=\frac{1}{3}v_n$$

Ainsi (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=u_0+3=-1+3=2$

3) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $v_n=2\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2}{3^n}$

b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_n=v_n-3=\frac{2}{3^n}-3$

4) (v_n) est une suite géométrique de raison $-1<\frac{1}{3}<1$, donc (v_n) tend vers 0.

On conjecture que (u_n) tend vers -3

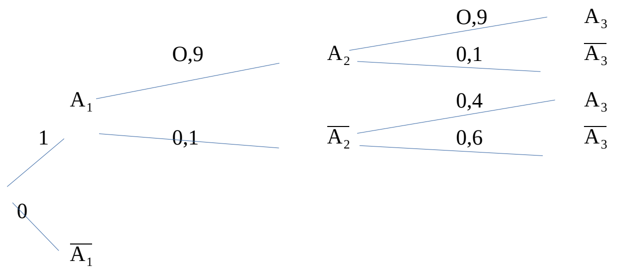
5) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $S_n=2\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=2\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}=2\times\frac{3}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)=3-\frac{1}{3^n}$

b) $S'_n = S_n - 3(n+1) = 3 - \frac{1}{3^n} - 3n - 3 = -\frac{1}{3^n} - 3n$

$S'_{200} = -\frac{1}{3^{200}} - 600$

Exercice 3 :

1) a)

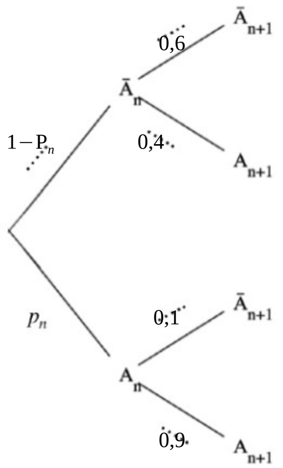


A_2 et $\overline{A_2}$ forment une partition de l'univers . D'après la formule des probabilités totales, on a :

$p_3 = P(A_3) = P(A_2 \cap A_3) + P(\overline{A_2} \cap A_3) = 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}81 + 0{,}04 = 0{,}85$

b) $P_{A_3}(A_2) = \frac{P(A_3 \cap A_2)}{P(A_3)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}9}{0{,}85}$ $\approx$ O,95

2) a)



b) A_n et $\overline{A_n}$ forment une partition de l'univers . D'après la formule des probabilités totales, on a :

$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = p_n \times 0{,}9 + (1 - p_n) \times 0{,}4 \quad = 0{,}9\, p_n + 0{,}4 - 0{,}4\, p_n = 0{,}5\, p_n + 0{,}4$

3) a)Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$p_{n+1} - p_n = 0{,}5\, p_n + 0{,}4 - p_n = -0{,}5\, p_n + 0{,}4$

Or on a admis que $p_n > 0{,}8 \Rightarrow -0{,}5\, p_n < -0{,}5 \times 0{,}8 \Rightarrow -0{,}5\, p_n < -0{,}4 \Rightarrow -0{,}5\, p_n + 0{,}4 < 0 \Rightarrow p_{n+1} - p_n < 0$
Ainsi (p_n) est décroissante.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$v_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}8 = 0{,}5\, p_n + 0{,}4 - 0{,}8 = 0{,}5\, p_n - 0{,}4 = 0{,}5(u_n - 0{,}8) = 0{,}5\, v_n$

Ainsi (v_n) est géométrique de raison $0,5$ et de premier terme $v_1=p_1-0,8=1-0,8=0,2$
c) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a : $v_n=0{,}2\times(0{,}5)^{n-1}$ et $p_n=v_n+0,8$ = $0{,}2\times(0{,}5)^{n-1}$ +0,8

d) (v_n) est une suite géométrique de raison $-1<0{,}5<1$, donc (v_n) tend vers 0.
On conjecture que (p_n) tend vers 0,8

La probabilité qu'un client achète un melon la nième semaine pour n suffisamment grand se rapproche de 0,8

Question automatisme :

Réponse b

$$\begin{cases}2x-4y=5(\mathrm{L}_1)\\3x+5y=-4(\mathrm{L}_2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4y=5(\mathrm{L}_1)\\-22y=23(\mathrm{L}_2\leftarrow 3\mathrm{L}_1-2\mathrm{L}_2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=5+4y\\y=\dfrac{-23}{22}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}+\dfrac{4}{2}\times\dfrac{-23}{22}\\y=\dfrac{-23}{22}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{55}{22}-\dfrac{46}{22}\\y=\dfrac{-23}{22}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{9}{22}\\y=\dfrac{-23}{22}\end{cases}$$