Devoir 2 correction :

:

Exercice 1 :

1) $\alpha=-\frac{8}{-2}=4$ et $a<0$. On a donc :

x	- ∞	4	+∞
u_n	$\nearrow$		$\searrow$

(u_n) est donc décroissante à partir de $n=4$.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $v_{n+1}-v_n=\frac{2(n+1)+4}{5(n+1)+9}-\frac{2n+4}{5n+9}=\frac{2n+6}{5n+14}-\frac{2n+4}{5n+9}=\frac{(2n+6)(5n+9)-(2n+4)(5n+14)}{(5n+14)(5n+9)}$

Donc $v_{n+1}-v_n=\frac{(10n^2+18n+30n+54)-(10n^2+28n+20n+56)}{(5n+14)(5n+9)}=\frac{-2}{(5n+14)(5n+9)}<0$

La suite (v_n) est donc décroissante.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{\frac{0{,}7^{n+1}}{20(n+1)}}{\frac{0{,}7^n}{20n}} = \frac{0{,}7^{n+1}}{20(n+1)}\frac{20n}{0{,}7^n}=\frac{0{,}7^{n+1}}{0{,}7^n}\frac{n}{n+1} = \frac{0{,}7\times n}{n+1}=\frac{0{,}7n}{n+1}<1$

Comme $w_n>0$, on en déduit que $w_{n+1}<w_n$ et que (w_n) est décroissante

Exercice 2 :

1) $v_1=1^2-1=0$ et $v_2=0^2-1=-1$

2) def v(n) :

```
v=1
for i in range(1,n+1) :
   v=v**2-1
return v
```

Exercice 3 :

1) $u_1=\frac{2}{2\times2+1}=\frac{2}{5}$ et $u_2=\frac{\frac{2}{5}}{2\times\frac{2}{5}+1}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}+\frac{5}{5}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{9}{5}}=\frac{2}{9}$

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{2u_n+1}-u_n=\frac{u_n}{2u_n+1}-\frac{u_n(2u_n+1)}{2u_n+1}=\frac{-2(u_n)^2}{2u_n+1}$

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1}-u_n<0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

4) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1}=\frac{2}{4(n+1)+1}=\frac{2}{4n+5}$

Et $\frac{u_n}{2u_n+1}=\frac{\frac{2}{4n+1}}{2\left(\frac{2}{4n+1}\right)+1} = \frac{\frac{2}{4n+1}}{\frac{4}{4n+1}+\frac{4n+1}{4n+1}}=\frac{\frac{2}{4n+1}}{\frac{4n+5}{4n+1}}=\frac{2}{4n+5}$

On a donc bien $\frac{u_n}{2u_n+1}=u_{n+1}$

5) $u_n<10^{-3}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{2}{4n+1}<10^{-3}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{2}{10^{-3}}<4n+1$ $\Leftrightarrow$ $2000-1<4n$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1999}{4}<n$

Ainsi $n=500$

5) a)

```
def seuil(n)
  n=0
  u=2
  while u>=10**(-3) :
     u=u/(2*u+1)
     n=n+1
  return n
```

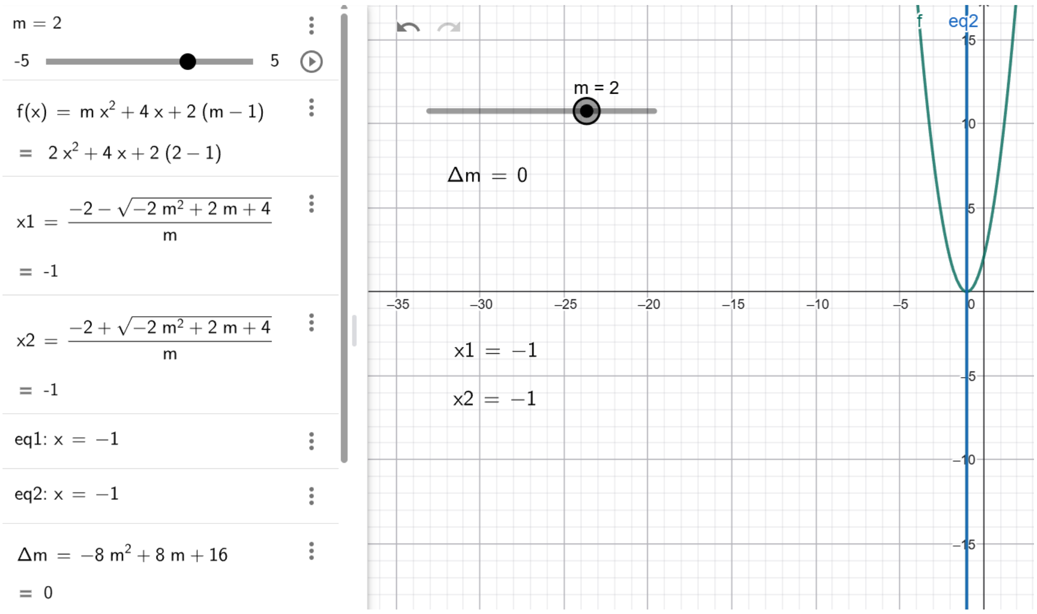
6) (u_n) semble tendre vers 0.

<u>Exercice 4 :</u>

1) $\Delta_m=16-4m(2(m-1))=16-8m^2+8m=-8m^2+8m+16=8(-m^2+m+2)$

L'équation admet une unique solution quand $\Delta_m=0$, c'est à dire :

$m_1=-1$ est une racine évidente . $m_1\times m_2=-2$, donc $m_2=2$

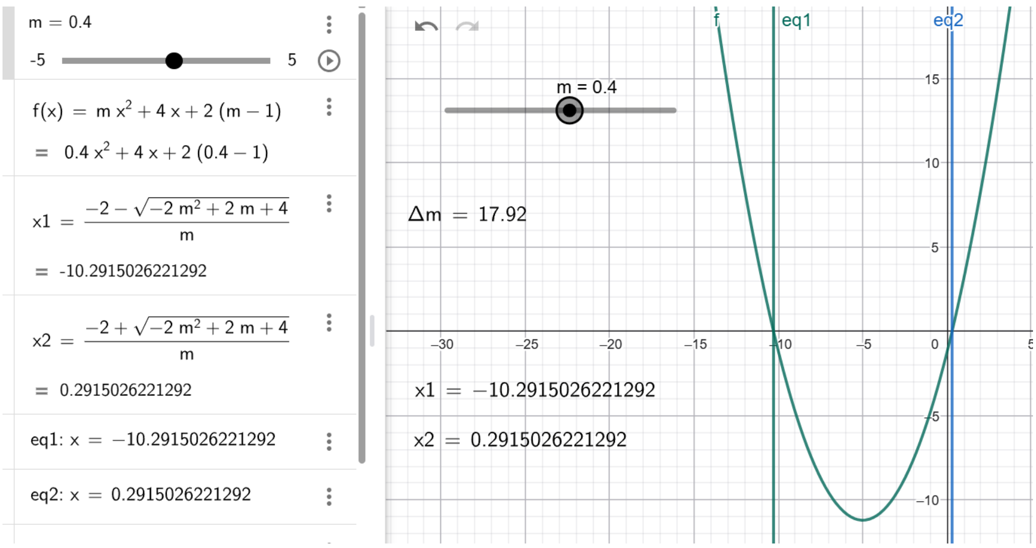


Pour $m_1=-1$, on trouve $x_0=2$ et pour $m_2=2$, on trouve $x_0=-1$

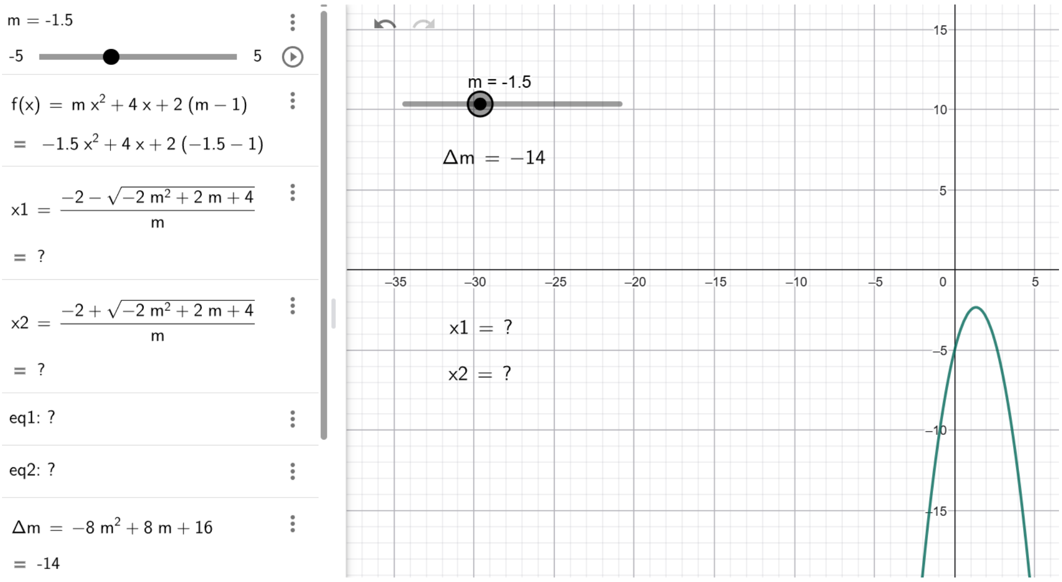
2) L'équation admet deux racines distinctes quand $\Delta_m>0$ et $m\neq 0$, c'est à dire : $m\in]m_1;0[\cup]0;m_2[$

On obtient : $x_1=\dfrac{-4-\sqrt{4(-2m^2+2m+4)}}{2m}=\dfrac{-4-2\sqrt{-2m^2+2m+4}}{2m}=\dfrac{-2-\sqrt{-2m^2+2m+4}}{m}$

et $x_2=\dfrac{-4+\sqrt{4(-2m^2+2m+4)}}{2m}=\dfrac{-4+2\sqrt{-2m^2+2m+4}}{2m}=\dfrac{-2+\sqrt{-2m^2+2m+4}}{m}$



3) Il faut $m<0$ et $\Delta_m<0$. On trouve donc $]-\infty;m_1[$



Question automatisme : b