Devoir 1 correction :

:
Exercice 1 :

1) Fonction f :

La parabole a pour sommet $\mathrm{D}(1;1)$
Donc le trinôme admet une forme canonique du type : $\mathrm{f}(x)=a(x-1)^2+1$

De plus la parabole passe par E(0;2), donc :
$f(0)=2 \quad \Leftrightarrow \quad a+1=2 \quad \Leftrightarrow \quad a=1$

On obtient donc $f(x)=(x-1)^2+1$

Fonction g :

La parabole a pour sommet $\mathrm{A}(-1;5)$
Donc le trinôme admet une forme canonique du type : $\mathrm{g}(x)=a(x+1)^2+5$

De plus la parabole passe par B(0;3), donc :
g(0)=3 $\Leftrightarrow \quad a+5=3 \quad \Leftrightarrow \quad a=-2$

On obtient donc $g(x)=-2(x+1)^2+5$

2) On trouve environ 0,3

3) $f(x)=g(x) \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2+1=-2(x+1)^2+5 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x+1+1=-2(x^2+2x+1)+5 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2+2x-1=0$
$x_1=-1$ est une solution évidente.
$x_1 x_2=-\frac{1}{3}$, donc $x_2=\frac{1}{3}$

Exercice 2 :

1) $x^4-7x^2+10=0$ (E)

On pose $\mathrm{X}=x^2$
On est amené à résoudre $\mathrm{X}^2-7\mathrm{X}+10=0$ (E')

$\Delta=49-40=9$. On obtient $\mathrm{X}_1=\frac{7-3}{2}=2$ et $\mathrm{X}_2=\frac{7+3}{2}=5$

les solutions des deux équations suivantes :

$x^2=2$	$x^2=5$
$\Leftrightarrow \quad x=-\sqrt{2}$ ou $x=\sqrt{2}$	$\Leftrightarrow \quad x=-\sqrt{5}$ ou $x=\sqrt{5}$

Ainsi $\mathrm{S}=\{-\sqrt{5},-\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{5}\}$

2) Cette équation **<u>n'a de sens</u>** que pour $x \geqslant 0$.
On pose $\mathrm{X}=\sqrt{x}$.

On est amené à résoudre $2\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-6=0$

$\Delta=1-4\times 2\times(-6)=49$

$\Delta>0$, donc il y a deux racines distinctes.
On obtient $\mathrm{X}_1=\frac{1+\sqrt{49}}{4}$ =2 et $\mathrm{X}_2=\frac{1-\sqrt{49}}{4}$ $=-\frac{3}{2}$ <0

$\sqrt{x}=\mathrm{X}_2$ n'a pas de solutions.

Donc la solutions de (E) est la solution de l'équation :

$\sqrt{x}=\mathrm{X}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x}=2 \quad \Leftrightarrow \quad x=4$

Exercice 3 :

1) $\Delta_m=(2(m+2))^2-4\times1\times(6-2m^2-m)=4((m+2)^2-(6-2m^2-m))=4(3m^2+5m-2)$

2) Il suffit d'étudier $3m^2+5m-2$

$\Delta=25-4\times3\times(-2)$ =49 . On obtient … $m_1=-2$ et $m_2=\frac{1}{3}$

Ainsi $3m^2+5m-2$ est :

- strictement positif sur $]-\infty;-2[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$
- strictement négatif sur $\left]-2;\frac{1}{3}\right[$
- s'annule en -2 et en $\frac{1}{3}$

3) - 2 solutions si $m \in]-\infty;-2[\cup\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

- aucune solution si $m \in \left]-2;\frac{1}{3}\right[$
- 1 solution si $m=-2$ ou $m=\frac{1}{3}$

4) Il faut en plus que $x_1x_2=\frac{c}{a}$ soit positif, c'est à dire $6-2m^2-m>0 \Leftrightarrow -2m^2-\mathrm{m}+6>0$

Les racines sont … -2 et $\frac{3}{2}$

Ainsi $-2m^2-\mathrm{m}+6>0 \Leftrightarrow m\in\left]-2;\frac{3}{2}\right[$

Il y a donc deux solutions de même signe sur l'intervalle $\left]\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right[$

Exercice 4 :

1) $\mathrm{P}(-1)=0$ trivial

2) Pour tout réel x , on a : $(x+1)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx+ax^2+bx+c$

$$=ax^3+(b+a)x^2+(c+b)x+c$$

Par identification avec $\mathrm{P}(x)$, on obtient :

$$\begin{cases}a=3\\b+a=-7\\c+b=-7\\c=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\b=-10\\c=3\end{cases}$$

Ainsi pour tout réel x , on a : $\mathrm{P}(x)=(x+1)(3x^2-10x+3)$

c) Factorisons $3x^2-10x+3$

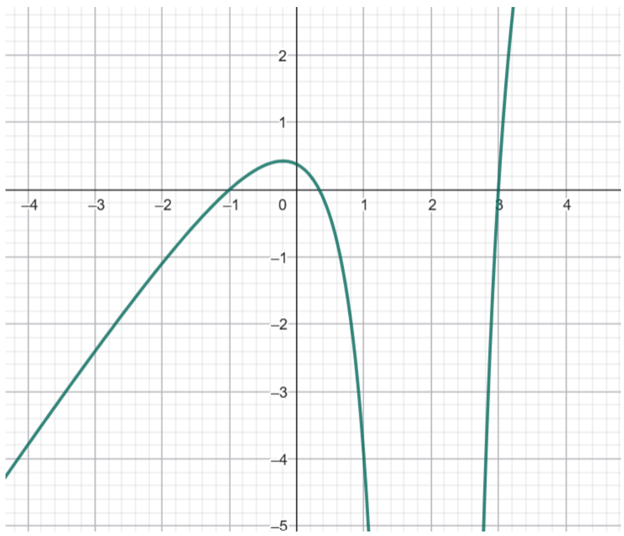
On trouve Δ =64, puis $x_1=\frac{1}{3}$ et $x_2=3$

Ainsi pour tout réel x , on a :

$\mathrm{P}(x)=0 \Leftrightarrow x+1=0$ ou $3x^2-10x+3 =0 \Leftrightarrow x=-1$ ou $x=\frac{1}{3}$ ou $x=3$

4) Pour tout réel x , on a : $2x^2-8x+8=2(x^2-4x+4)=2(x-2)^2$

x	- ∞		-1		$\frac{1}{3}$		2		3	
$x+1$		-	0	+		+		+		+
$3x^2-10x+3$		+		+	0	-		-	0	+
$2x^2-8x+8$		+		+		+	0	+		+
$\mathrm{Q}(x)$		-	0	+	0	-	||	-	0	+



Exercice 5 :

1) $\mathrm{C}(x)=500 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-20x+200=500 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-20x-300=0$

$x_1=-10$ est une racine évidente.

$x_1 x_2=\frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad -10x_2=-300 \quad \Leftrightarrow \quad x_2=30$

La solution est positive . Le nombre d'objets cherchés est donc 30.

2) $\mathrm{R}(x)=34x$

2) $\mathrm{B}(x)=34x-\mathrm{C}(x)=-x^2+54x-200$

4) $\alpha=-\frac{54}{-2}$ =27 et $a<0$. On a donc

x	- ∞	27	+∞
B	$\nearrow$	B(27)	$\searrow$

5) Le bénéfice est donc B(27)… (difficile à calculer de tête) obtenu pour 27 objets.

Question automatisme :

$(0,5x+0,2)^2=0,25x^2+0,2x+0,04$