LOI BINOMIALE

1) EXPÉRIENCES IDENTIQUES ET INDÉPENDANTES

Définition :

On considère n (où $n \in \mathbb{N}^*$) expériences aléatoires **identiques** successives . Si les résultats de chacune d'elles ne dépendent pas des résultats des expériences précédentes, on dit que ces expériences sont **indépendantes**.

Remarque :
Lors de tirages successifs avec remise, les expériences sont indépendantes.

Propriété :

Lors de la répétition d'expériences identiques et indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

2) SCHÉMA DE BERNOULLI

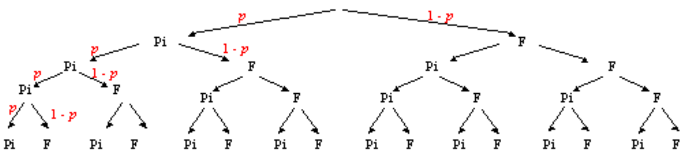
Définition :

On appelle **épreuve de Bernoulli** une épreuve ayant deux éventualités :
l'éventualité S avec la probabilité p et l'éventualité $\overline{S}$ avec la probabilité $1-p$.

L'éventualité S correspondra souvent au "succès" d'une expérience, $\overline{S}$ étant alors "l'échec".

Exemple :
On jette une pièce de monnaie.
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli, les deux éventualités sont Pi : "Pile" et F : "Face".
Notons $P(Pi) = p$ et $P(F) = 1-p$

(si la pièce est équilibrée, on a $P(Pi) = \dfrac{1}{2}$ et $P(F) = \dfrac{1}{2}$).



On répète quatre fois, de façon indépendante, le jet de cette pièce . On peut traduire la situation par un arbre pondéré.
L'univers de cette expérience aléatoire se compose de 16 quadruplets (un quadruplet est une liste de 4 éléments) de résultats correspondants chacun aux 16 chemins de l'arbre.

La probabilité d'obtenir le quadruplet $(Pi\,;Pi\,;F\,;Pi)$ est $p \times p \times (1-p) \times p = p^3(1-p)$

La probabilité d'obtenir trois fois Pile sur les quatre lancers est la probabilité de l'événement :

$\{(Pi\,;Pi\,;Pi\,;F)\,;(Pi\,;Pi\,;F\,;Pi)\,;(Pi\,;F\,;Pi\,;Pi)\,;(F\,;Pi\,;Pi\,;Pi)\}$
Elle est égale à $4 \times p^3(1-p)$

Le nombre 4 correspond au nombre de choix des positions des trois Pi dans la séquence de quatre (ou, ce qui est identique, au nombre de choix de la position du F dans la séquence de quatre), c'est-à-dire le nombre de chemins de l'arbre réalisant 3 succès pour 4 répétitions.
Notons X la variable aléatoire égale au nombre de "Pile" obtenus sur les quatre lancers.
On a $X(\Omega) = \{0\,;1\,;2\,;3\,;4\}$ et on a justifié que $P(X=3) = 4 \times p^3(1-p)$

En procédant de même, on en déduit la loi de probabilité de X :

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$p^0(1-p)^4$	$4\,p^1(1-p)^3$	$6\,p^2(1-p)^2$	$4 \times p^3(1-p)$	$p^4(1-p)^0$

Définition :

On appelle **schéma (ou expérience) de Bernoulli**, la répétition n fois, de manière indépendante, d'une épreuve de Bernoulli.

Remarque :
On dit que la variable aléatoire de l'exemple précédent suit une loi binomiale de paramètres 4 (nombre de répétitions) et p (probabilité du succés)

3) COEFFICIENTS BINOMIAUX ET TRIANGLE DE PASCAL

A) COEFFICIENTS BINOMIAUX

Dans l'exemple précédent, on a chaque fois déterminé le nombre de chemins de l'arbre réalisant k ($k \in \mathbb{N}$ et $k \leqslant 4$) succès pour 4 répétitions.
De façon plus générale,

Définition :

Le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès ($k \in \mathbb{N}$ et $k \leqslant n$) pour n répétitions est le nombre noté $\dbinom{n}{k}$.

On l'appelle **coefficient binomial** . $\dbinom{n}{k}$ Se lit “ k parmi n ”.

Propriétés :

- Pour tout entier naturel n, et pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on a : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- De plus, si $n \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant n-1$, alors : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Preuve :

- k succès correspondent à $n-k$ échecs …
  Il est donc identique de dénombrer le nombre de chemins de l'arbre réalisant k succès pour n répétitions et le nombre de chemins de l'arbre réalisant $n-k$ échecs pour n répétitions.

- On considère un arbre représentant de manière indépendante la répétition de $n+1$ épreuves de Bernoulli.
  Dénombrons le nombre de chemins de l'arbre représentant $k+1$ succès suivant le résultat obtenu au cours de la première épreuve.

S

S étant un succès, il faut encore dénombrer le nombre de chemins de l'arbre représentant k succès sur les n répétitions restantes . Il y en a $\binom{n}{k}$

$\overline{S}$

$\overline{S}$ étant un échec, il faut encore dénombrer le nombre de chemins de l'arbre représentant $k+1$ succès sur les n répétitions restantes . Il y en a $\binom{n}{k+1}$

On en déduit que : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

B) TRIANGLE DE PASCAL

La deuxième formule permet de calculer les nombres $\binom{n}{k}$ de proche en proche en formant le tableau suivant appelé **triangle de Pascal** .

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3 +	3 =	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

- $\binom{n}{k}$ n'est défini que pour $k \leqslant n$; on ne remplit donc pas les cases situées au-dessus de la diagonale.
- Tous les nombres de la diagonale sont obtenus en utilisant le résultat $\binom{n}{n} = 1$
- Tous les nombres de la première colonne sont obtenus en utilisant la formule $\binom{n}{0} = 1$
- Tous les autres nombres sont obtenus en utilisant le résultat :
  $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$
  « Tout nombre du tableau est la somme du nombre placé au-dessus de lui et du nombre précédant ce dernier dans le tableau »

4) LOI BINOMIALE

Propriété :

On considère un schéma de Bernoulli consistant en la répétition n fois d'une épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès S est p.
Si on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus sur les n répétitions, la loi de probabilité de X est donnée par :
pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Définition :

On dit que la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une **loi binomiale de paramètres n et p** lorsque :

- l'ensemble de ses valeurs est $\{0 ; 1 ; \dots ; n\}$
- pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Cette loi est parfois notée $B(n ; p)$

Propriété : *admise*

La loi binomiale de paramètres n et p a pour espérance mathématique $E(X) = np$ et pour variance $V(X) = np(1-p)$