Angles orientés de vecteurs en radians

Ex 1 : ***Vrai ou faux - restituer les notions du cours***

1) Les degrés et les radians sont proportionnels.
2) Un angle au centre de 90° correspond à un angle plat.
3) Un radian est égal à π .
4) Une mesure principale détermine un angle unique.
5) Le sens positif est le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre.

Ex 2 : ***QCM - restituer les notions du cours***

1) Un radian vaut environ :
a) 60° b) 180° c) 90° d) 57,3°
2) Un tour mesure en radian :
a) 2π b) 1 c) π d) 6,28
3) Un angle droit mesure en radian :
a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) π d) 1,57
4) Pour un angle donné , combien existe-t-il de mesure principale ?
a) une infinité b) 2 c) 1 d) 4 e) aucune
5) Une mesure principale est dans l'intervalle :
a) $]0;2\pi]$ b) $[\pi;2\pi[$ c) $]-\pi;\pi]$ d) $]0;\pi]$

Ex 3 : ***Conversion***

radians	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{6}$			
degrés				-117	240	350

Ex 4 : ***Mesure principale***

1) Déterminer la mesure principale des angles suivants, puis les placer sur le cercle trigonométrique :

a) $-\frac{7\pi}{2}$ b) $\frac{15\pi}{4}$ c) $\frac{13\pi}{3}$ d) $\frac{25\pi}{6}$ e) $-\frac{15\pi}{6}$

2) Déterminer la mesure principale des angles suivants :

a) $\frac{23\pi}{6}$ b) $-\frac{49\pi}{6}$ c) $\frac{245\pi}{3}$ d) $-\frac{131\pi}{6}$ e) -1745π f) 153 rad

Ex 5 : ***Une seule mesure principale***

L'angle orienté $\frac{7\pi}{4}$ a pour mesure principale $-\frac{\pi}{4}$.
Déterminer dans l'intervalle $]-3\pi;7\pi]$ tous les angles orientés qui ont la même mesure principale que $\frac{7\pi}{4}$.

Ex 6 : ***Algorithme*** (consulter trigonometrie_python6)

Écrire un algorithme donnant toutes les mesures d'angles orientés de l'intervalle $]-11\pi;11\pi[$ ayant pour mesure principale $\frac{\pi}{6}$

Ex 7 : **Radar**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Sur un écran radar, on repère un avion par un point M tel que $OM=r$ et tel que $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ a pour mesure principale α .

Déterminer la zone où se trouve l'avion si :

a) $\begin{cases}1\leqslant r\leqslant 3\\ \frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}\end{cases}$ b) $\begin{cases}2\leqslant r<4\\ \frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant\frac{5\pi}{6}\end{cases}$

Ex 8 : ***Longueurs et aires***

On considère un secteur angulaire d'angle α en radian, dans un cercle de rayon r .

1) Exprimer la longueur de l'arc de cercle en fonction de r et de α .
2) Exprimer l'aire du secteur angulaire en fonction de r et de α .

Cosinus et sinus d'un réel

Ex 9 : ***Valeurs remarquables***

Compléter le tableau ci-dessous :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$					
$\cos x$					

Ex 10 : ***Signe du cosinus ou du sinus***

Donner le signe du sinus ou du cosinus dans chacun des cas suivants :
a) $\sin x$ et $x\in[0;\pi]$ b) $\cos x$ et $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

c) $\sin x$ et $x\in[-\pi;0]$ d) $\cos x$ et $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$

Ex 11 : ***Un peu de logique***

1) Si $\cos x=\frac{1}{2}$, alors $x=\frac{\pi}{3}$

2) Si $x=\frac{\pi}{4}$, alors $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) Si $\cos x=-\frac{1}{2}$ ou $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $x=\frac{2\pi}{3}$

4) Si $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x=\frac{1}{2}$, alors $x=\frac{5\pi}{6}$

5) Si $\cos(2x)=\cos(2y)$, alors $\cos x=\cos y$

Ex 12 : ***Tangente***

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique C , un point M de C, H son projeté orthogonal sur (OI) et le point T, intersection de la droite (OM) et de la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par I .
On note t l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

1) Démontrer que $\text{TI}=\tan t$

2) En déduire graphiquement la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

3) Géométriquement, expliquer pourquoi $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ n'existe pas.

4) Vérifier les questions précédentes avec la définition de la tangente à partir du cosinus et du sinus . Donner les valeurs exactes de $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Ex 13 : ***Dans un cube.***

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.
Déterminer une valeur approchée d'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG})$.

Ex 14 : ***Simplifications***

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$

2) $B=(1+\cos x+\sin x)^2-2(1+\cos x)(1+\sin x)$

3) $C=\cos^4 x-\sin^4 x+2\sin^2 x$

4) $D=\frac{1}{\cos^2 x}-\tan^2 x-1$ (préciser les valeurs possibles de x)

Lignes trigonométriques des angles associés

Ex 15 : ***Même sinus, même cosinus***

1) Parmi les angles donnés, quel est celui qui a le même cosinus que $\frac{\pi}{3}$.

a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{13\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $-\frac{4\pi}{3}$

2) Parmi les angles donnés, quel est celui qui a le même sinus que $\frac{\pi}{6}$.

a) $\frac{11\pi}{6}$ b) $-\frac{7\pi}{6}$ c) $\frac{5\pi}{3}$ d) $-\frac{5\pi}{6}$

Ex 16 : ***Valeurs exactes***

1) Pour chacun des angles donnés, trouver leur mesure principale et en déduire les valeurs exactes de leur cosinus et de leur sinus :

a) $\frac{31\pi}{6}$ b) $-\frac{13\pi}{4}$ c) $\frac{29\pi}{3}$ d) $\frac{35\pi}{2}$

2) Déterminer les valeurs exactes demandées :

a) $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ b) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ c) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ d) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

e) $\sin(177\pi)$ f) $\cos\left(\frac{31\pi}{3}\right)$ g) $\sin\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$ h) $\cos\left(-\frac{13\pi}{2}\right)$

Ex 17 : ***Simplifications***

Simplifier les expressions suivantes :

1) $\cos(3\pi+x)$ 2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$ 3) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

4) $\sin(x-7\pi)$ 5) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$ 6) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

Ex 18 : ***Seul angle possible***

Déterminer le seul angle x possible :

1) $\cos x=-\frac{1}{2}$ et $x\in[0;\pi]$

2) $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin x=-\frac{1}{2}$ et $x\in]-\pi;\pi]$

3) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x\in]-\pi;0]$

4) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x=-\frac{1}{2}$ et $x\in]0;2\pi]$

Ex 19 : ***Sinus correspondant à un cosinus et inversement***

Connaissant la valeur de $\cos x$ ou de $\sin x$ sur un intervalle donné, déterminer la valeur du sinus ou du cosinus correspondant :

1) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ 2) $\cos x=-\frac{1}{2}$ et $x\in[-\pi;0]$

3) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x\in[\pi;2\pi]$ 4) $\sin x=\frac{1}{2}$ et $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Ex 20 : ***Simplifications***

Simplifier les expressions suivantes :

1) $A=\cos(\pi-x)+2\cos x-3\cos(x+\pi)$

2) $B=\sin(x+5\pi)+3\sin(x+7\pi)-\sin(-x)$

3) $C=\cos(-x)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$

4) $D=\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(5\pi+x)$

5) $E=\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{10\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{13\pi}{7}\right)$

6) $F=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

7) $G=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{2\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\ldots+\sin^2\frac{11\pi}{12}$

Équations trigonométriques

Ex 21 : ***Vrai ou faux - restituer les notions du cours***

1) Une équation trigonométrique admet seulement deux solutions.
2) Deux angles qui ont le même sinus sont égaux.
3) Sur un demi-tour une équation trigonométrique n'a qu'une seule solution.

4) Quand on connaît le cosinus d'un angle, on peut déterminer son sinus.

5) L'équation $\cos x=\cos \boldsymbol{a}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

6) L'équation $\sin x=\sqrt{2}$ admet deux solutions dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$

7) Les équations $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ admettent les mêmes solutions dans $\mathbb{R}$.

Ex 22 : ***Équations de la forme*** $\cos x = \cos a$ ***et*** $\sin x = \sin a$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

a) $\cos x = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ b) $\sin x = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ c) $\cos x = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

d) $\cos(-x) = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ e) $\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ f) $\cos(3x) = \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

Ex 23 : ***Équations de la forme*** $\cos x = b$ ***et*** $\sin x = b$ ***- calculatrice***

À l'aide de la calculatrice, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous (on donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près):

a) $\sin x = 0{,}3$ b) $\cos x = -0{,}3$ c) $\sin(2x) = 0{,}4$ d) $\sin(-3x) = 0{,}2$

Ex 24 : ***Sinus correspondant à un cosinus et inversement - calculatrice***

A l'aide de la calculatrice, connaissant la valeur de $\sin x$ ou de $\cos x$ sur un intervalle donné, déterminer la valeur du sinus ou du cosinus correspondant :

a) $\cos x = 0{,}6$ et $x \in [-\pi ; 0]$ b) $\sin x = 0{,}8$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$

Ex 25 : ***Équations de la forme*** $\cos x = b$ ***et*** $\sin x = b$ ***- calculatrice***

À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'angle cherché :

a) $\cos x = 0{,}4$ et $x \in [\pi ; 2\pi]$ b) $\sin x = 0{,}3$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$

Ex 26 : ***Solutions dans un intervalle donné***

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

b) En déduire les solutions de cette équation dans $[-3\pi ; 3\pi]$

2) Résoudre les équations suivantes dans les intervalles donnés :

a) $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ dans $]0 ; 5\pi]$

b) $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ dans $]-3\pi ; 4\pi]$

Ex 27 : ***Équations plus compliquées***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :

a) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$

b) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-x + \frac{\pi}{6}\right)$

c) $\sin(2x) = \cos x$

Ex 28 : ***Système – changement de variables***

Trouver les réel x et y de l'intervalle]- π ; π], solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 8\sin x + 3\sin y = 1 \\ 6\sin x + 5\sin y = -2 \end{cases}$$

Ex 29 : ***Second degré – changement de variable***

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

a) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ b) $2\sin^2 x - 3\sqrt{3}\sin x + 3 = 0$

Ex 30 : ***Inéquations – à l'aide d'une figure***

Résoudre dans l'intervalle]- π ; π] les inéquations suivantes :

a) $\cos x > \frac{1}{2}$ b) $\sin x \leqslant -\frac{1}{2}$ c) $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ex 31 : ***Algorithme – Dichotomie*** (consulter trigonométrie_python31)

On cherche à résoudre l'équation $\cos x = x$ sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour cela on considère la fonction $f : x \longmapsto \cos x - x$.
On admet qu'elle est strictement décroissante sur I.
On résout l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie . On pose $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{2}$.

1) Vérifier que $f(a) \times f(b) < 0$.
On en déduit que l'équation admet une solution notée α .

2) Déterminer le signe de $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. En déduire que $\alpha \in \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$

3) On remplace b par $\frac{a+b}{2}$.

Déterminer le signe de $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et en déduire l'intervalle d'appartenance de α .

4) Compléter l'algorithme suivant :

```
LIRE a
LIRE b
LIRE n
POUR i ALLANT_DE 1 A n
 SI (f(a)*f((a+b)/2) .............. ) ALORS
   b ← ..............
 FIN_SI
 SINON
   a ← ..............
 FIN_SINON
FIN_POUR
AFFICHER a
AFFICHER b

Fonction numérique utilisée :
f(x)=cos(x)-x
```

5) Programmer l'algorithme ci-dessus en python, puis déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.