TRIGONOMÉTRIE

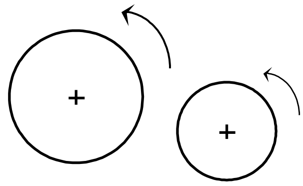
1) ORIENTATION DU PLAN

Définition :

Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé **sens direct** (ou positif).
L'autre sens est appelé **sens indirect** (négatif ou rétrograde)

Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.
L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre.
(appelé aussi **sens trigonométrique**)

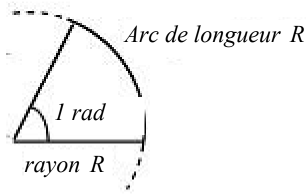
Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1.



2) MESURE DES ANGLES EN RADIAN

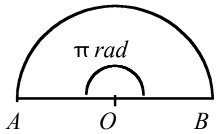
Définition :

On appelle **radian** (*rad*) la mesure de l'angle au centre qui intercepte, sur un cercle de rayon R , un arc de longueur R.



Remarques :

- Un angle au centre plat intercepte un arc de longueur πR . Il a donc pour mesure π radians.
- Les mesures d'un angle en radian et en degré sont proportionnelles. (heureusement)
  Il en découle que l 'on peut faire les conversions de mesures à l'aide d'un tableau de proportionnalité :



mesures en degré	180	360	90	45	60	30
mesures en radian	π	2π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{180}$

- $1\ rad \approx 57{,}3\ °$ $\quad 1° = \frac{\pi}{180}\ rad \approx 0{,}0175\ rad$
- L'arc intercepté par un angle au centre de x radians sur un cercle de rayon R a pour longueur xR .
  Si le cercle a pour rayon 1 , alors l'arc a pour longueur x

Sauf avis contraire, les angles sont mesurés en radian.

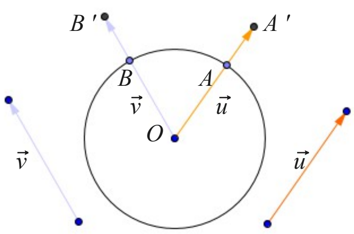
3) MESURES DE L'ANGLE ORIENTÉ D'UN COUPLE DE VECTEURS NON NULS

A) ENSEMBLE DES MESURES

Norme d'un vecteur :

- On note $\|\vec{u}\|$ **la norme** (longueur) d'un vecteur $\vec{u}$.
- $\|\vec{u}\| \geqslant 0$
- $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$
- $\|k\,\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$
- $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté, O un point quelconque et C le cercle trigonométrique de centre O.
On considère A' et B' les points définis par $\overrightarrow{OA'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB'} = \vec{v}$.
Les demi-droites $[OA')$ et $[OB')$ coupent le cercle trigonométrique C respectivement en A et en B.
Les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ sont unitaires, respectivement colinéaires à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de même sens qu'eux.



Définitions :

On appelle **mesures de l'angle orienté** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ tous les réels de la forme :

- $l + 2k\pi$ où l est la longueur de l'arc parcouru de A vers B dans le sens direct et où $k \in \mathbb{N}$
- $-l' - 2k\pi$ où l' est la longueur de l'arc parcouru de A vers B dans le sens indirect et où $k' \in \mathbb{N}$.

Remarque : On peut exprimer toute les mesures sous la forme $l + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Les mesures en radian de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ sont celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{OA}\,,\,\overrightarrow{OB})$ c'est à dire, celles de l'angle orienté de vecteurs unitaires $\left(\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}\,,\,\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}\right)$.
Il en résulte que si x est une mesure de $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$, alors les autres mesures sont de la forme $x+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
On dit que les angles orientés sont définis **modulo** 2π .

Notations :

- La notation usuelle est $(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}})$, mais s'il n'y a aucun risque de confusion, on notera seulement $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ cet angle orienté.

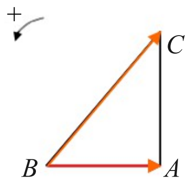
- Par abus de langage, on confond un angle et ses mesures.
  On écrit, par exemple, $(\vec{u}\,,\,\vec{v})=\frac{\pi}{2}$ signifiant qu'**une** mesure de $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ est $\frac{\pi}{2}$; les autres mesures sont alors de la forme $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
  On écrit aussi $(\vec{u}\,,\,\vec{v})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\boldsymbol{k\in\mathbb{Z}}$ ou encore $(\vec{u}\,,\,\vec{v})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

B) MESURE PRINCIPALE

Définition :
Une seule des mesures de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.
On l'appelle **mesure principale** de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

Remarque :
La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ est la mesure de l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs.

Exemple : Soit un triangle ABC , rectangle en A tel que $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{3}$



La mesure principale de $(\overrightarrow{BA}\,,\,\overrightarrow{BC})$ est $\frac{\pi}{3}$.

La mesure principale de $(\overrightarrow{CA}\,,\,\overrightarrow{CB})$ est $-\frac{\pi}{6}$ et $\widehat{ACB}=\frac{\pi}{6}$.

La mesure principale de $(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC})$ est $-\frac{\pi}{2}$ et $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{2}$

C) ANGLE NUL, ANGLE PLAT, ANGLES DROITS

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que:

Angle nul : la mesure principale de $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ est égale à 0.
(lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens)

ou

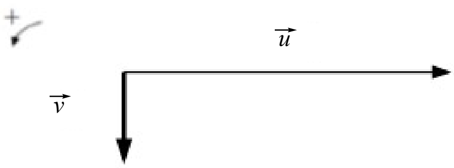
Angle plat : la mesure principale de $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ est égale à π .
(lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire)

$$(\vec{u}\,;\,\vec{v})=k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$$

- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux revient à dire que:

Angle droit direct : la mesure principale de $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ est égale à $\frac{\pi}{2}$.

ou



Angle droit indirect : la mesure principale de $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ est égale à $-\frac{\pi}{2}$.

$$(\vec{u}\,,\,\vec{v})=\frac{\pi}{2}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$$

Remarque :
Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul , $(\vec{u}\,;\,\vec{u})=0$ et $(\vec{u}\,;\,-\vec{u})=\pi$.

4) PROPRIÉTÉS DES MESURES DES ANGLES ORIENTÉS DE VECTEURS

A) RELATION DE CHASLES

Propriété : admise

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté.

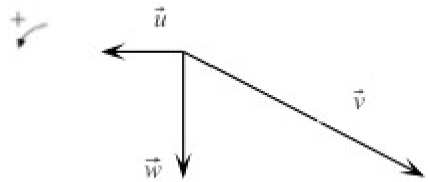
On a : $(\vec{u}\,,\vec{v})+(\vec{v}\,,\vec{w})=(\vec{u}\,,\vec{w})$

En additionnant n'importe quelle mesure de $(\vec{u}\,,\vec{v})$ à n'importe quelle mesure de $(\vec{v}\,,\vec{w})$, on obtient une mesure de $(\vec{u}\,,\vec{w})$.

Réciproquement, n'importe quelle mesure de $(\vec{u}\,,\vec{w})$ est la somme d'une mesure de $(\vec{u}\,,\vec{v})$ et d'une mesure de $(\vec{v}\,,\vec{w})$.

Exemple :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté tels que $(\vec{u}\,,\vec{v})=\frac{5\pi}{6}$ et $(\vec{v}\,,\vec{w})=-\frac{\pi}{3}$.



D'après la relation de Chasles: $(\vec{u}\,,\vec{v})+(\vec{v}\,,\vec{w})=(\vec{u}\,,\vec{w})$

On en déduit donc que $(\vec{u}\,,\vec{w})=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{6}=\frac{3\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont donc orthogonaux.

B) CONSÉQUENCES DE LA RELATION DE CHASLES

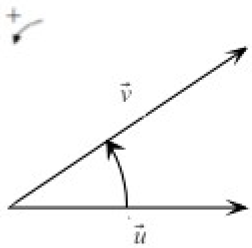
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.

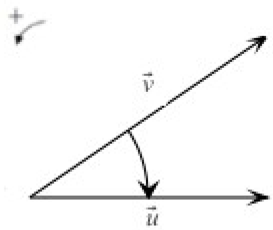
$$(\vec{u}\,,\vec{v})=-(\vec{v}\,,\vec{u})$$

D'après la relation de Chasles, $(\vec{u}\,,\vec{v})+(\vec{v}\,,\vec{u})=(\vec{u}\,,\vec{u})$.

Or $(\vec{u}\,,\vec{u})=0$,

Donc $(\vec{v}\,,\vec{u})=-(\vec{u}\,,\vec{v})$.



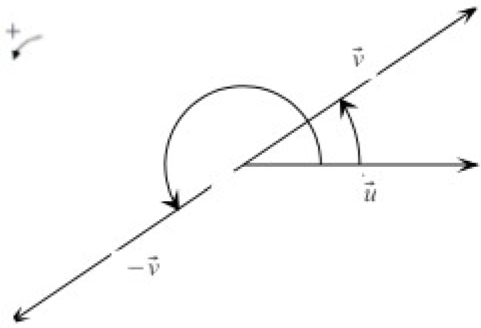


$$(\vec{u}\,,-\vec{v})=(\vec{u}\,,\vec{v})+\pi$$

D'après la relation de Chasles, $(\vec{u}\,,\vec{v})+(\vec{v}\,,-\vec{v})=(\vec{u}\,,-\vec{v})$.

Or $(\vec{v}\,,-\vec{v})=\pi$

Donc $(\vec{u}\,,-\vec{v})=(\vec{u}\,,\vec{v})+\pi$.

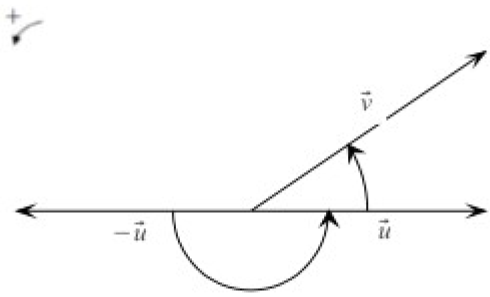


$$(-\vec{u}\,,\vec{v})=(\vec{u}\,,\vec{v})+\pi$$

D'après la relation de Chasles, $(-\vec{u}\,,\vec{u})+(\vec{u}\,,\vec{v})=(-\vec{u}\,,\vec{v})$.

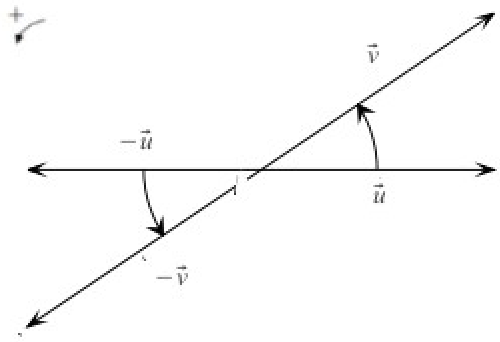
Or $(-\vec{u}\,,\vec{u})=\pi$

Donc $(-\vec{u}\,,\vec{v})=(\vec{u}\,,\vec{v})+\pi$.



$$(-\vec{u}\,,-\vec{v})=(\vec{u}\,,\vec{v})$$

D'après la relation de Chasles,
$(\vec{u}\,,\vec{v})=(\vec{u}\,,-\vec{u})+(-\vec{u}\,,-\vec{v})+(-\vec{v}\,,\vec{v})$
$\quad=\pi+(-\vec{u}\,,-\vec{v})+\pi$
$\quad=(-\vec{u}\,,-\vec{v})+2\pi$
$\quad=(-\vec{u}\,,-\vec{v})$ puisque les mesures sont définies modulo 2π .

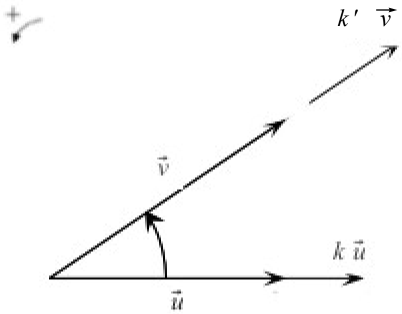


Soit k et k' deux réels non nuls.

Si k et k' sont de **même signe**, alors:

$$(k\cdot\vec{u}\,,k'\cdot\vec{v})=(\vec{u}\,,\vec{v})$$

(C'est une conséquence de la définition...)



Soit k et k' deux réels non nuls.

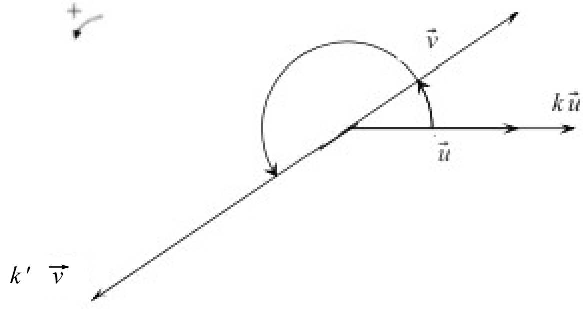
Si k et k' sont de **signes contraires**, alors:

$$(k\cdot\vec{u}\,,k'\cdot\vec{v})=(\vec{u}\,,\vec{v})+\pi$$

D'après la relation de Chasles, on a:
$(k\cdot\vec{u}\,,k'\cdot\vec{v})=(k\cdot\vec{u}\,,k\cdot\vec{v})+(k\cdot\vec{v}\,,k'\cdot\vec{v})$

Or $(k\cdot\vec{u}\,,k\cdot\vec{v})=(\vec{u}\,,\vec{v})$ et $(k\cdot\vec{v}\,,k'\cdot\vec{v})=\pi$, puisque $k\cdot\vec{v}$ et $k'\cdot\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires.

On a donc bien $(k\cdot\vec{u}\,,k'\cdot\vec{v})=(\vec{u}\,,\vec{v})+\pi$.



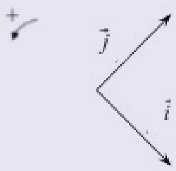
5) REPÈRE ORTHONORMAL

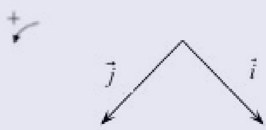
Définition :

Un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ est :

- **direct** , si l'une des mesures de $(\vec{i},\vec{j})$ est $+\frac{\pi}{2}$
- **indirect** , si l'une des mesures de $(\vec{i},\vec{j})$ est $-\frac{\pi}{2}$

Exemples : Repère orthonormal direct | Repère orthonormal indirect





Remarques :

- On définit de la même façon une base orthonormale directe …
- Étant donné un vecteur unitaire, il existe un unique vecteur unitaire tel que $(\vec{i},\vec{j})$soit une base orthonormale directe.

6) COSINUS ET SINUS D'UN ANGLE ORIENTÉ DE VECTEURS

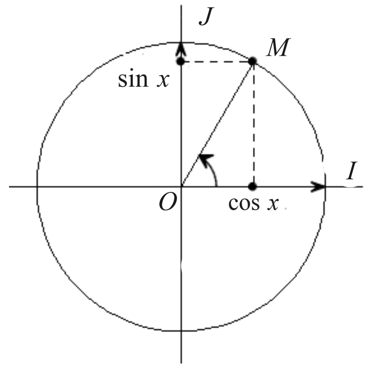
Sauf contre indication, l'unité utilisée est le radian.
Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. On considère le cercle trigonométrique C de centre O.

A) RAPPEL : Cosinus et sinus d'un réel

Définition :

Pour tout réel x, il existe un point M unique du cercle trigonométrique C tel que x soit une mesure de $(\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OM})$.

- L'abscisse du point M est le **cosinus** de x (noté $\cos x$)
- L'ordonnée du point M est le **sinus** de x (noté $\sin x$)



B) COSINUS ET SINUS D'UN ANGLE ORIENTÉ DE VECTEURS

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan orienté.
Si x est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}\,,\vec{v})$, alors les autres mesures sont de la forme $x+2k\pi\,,\ k\in\mathbb{Z}$.
Or $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin x$. On en déduit la définition suivante :

Définition :

Le cosinus (respectivement le sinus) de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}\,,\vec{v})$ est le cosinus (respectivement le sinus) de l'une quelconque de ses mesures.
On note $\mathbf{\cos(\vec{u}\,,\vec{v})}$ et $\mathbf{\sin(\vec{u}\,,\vec{v})}$.

C) LIEN entre $\cos(\vec{u}\,,\vec{v})$ et $\cos(\widehat{AOB})$ lorsque $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$

Notons α la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et notons x la mesure principale de $(\vec{u}\,,\vec{v})$. On a $\alpha=|x|$.

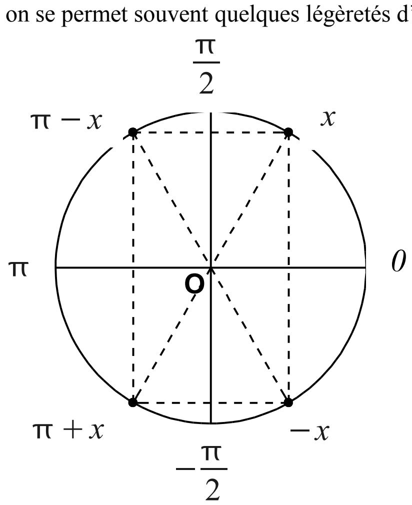
Deux cas se présentent :
- Si $x\geqslant 0,\ |x|=x$ et par suite $\cos\alpha=\cos x$.
- Si $x\leqslant 0,\ |x|=-x$, et $\cos\alpha=\cos(-x)=\cos x$

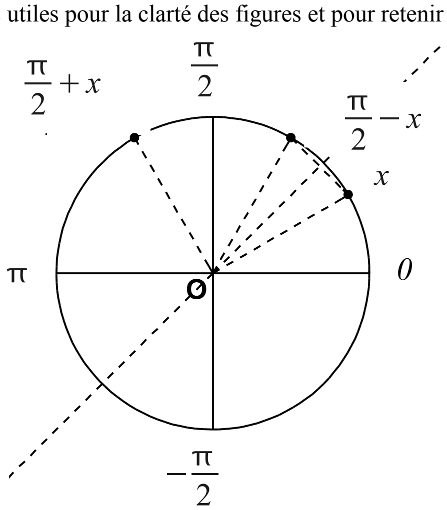
On a donc : $\mathbf{\cos(\vec{u}\,,\vec{v})=\cos(\widehat{AOB})}$

Remarque : Ce n'est pas vrai pour le sinus: $\sin(\widehat{AOB})=|\sin(\vec{u}\,,\vec{v})|$

7) LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES DES ANGLES ASSOCIÉS

Remarque préliminaire :
Dans la pratique, on se permet souvent quelques légèretés d'écriture … très utiles pour la clarté des figures et pour retenir les formules.





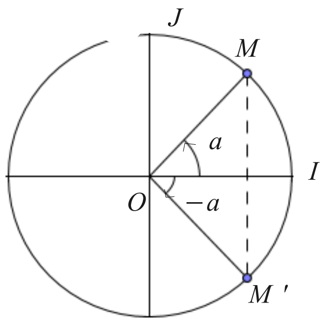
Les formules ci-dessous sont vraies pour tout réel x , mais pour faciliter la mémorisation, on se place dans le premier cadran.

Propriétés :

• $\cos(-x)=\cos x$ • $\cos(\pi-x)=-\cos x$ • $\cos(\pi+x)=-\cos x$ • $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ • $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$	• $\sin(-x)=-\sin x$ • $\sin(\pi-x)=\sin x$ • $\sin(\pi+x)=-\sin x$ • $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ • $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

8) ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

A) cos *x* = cos *a*



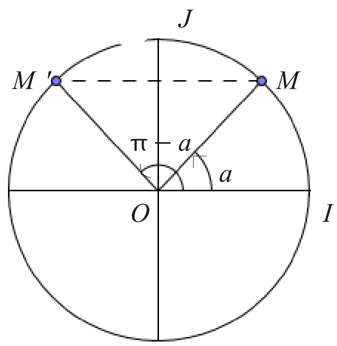
Propriété :

$$\cos x=\cos a \iff x=a+2k\pi \text{ ou } x=-a+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$

Remarques :

- Graphiquement, il existe deux points M et M' , symétriques par rapport à (OI) sur le cercle trigonométrique C qui correspondent à des angles qui ont le même cosinus. On retrouve la formule des angles associés :
$$\cos(-x)=\cos(x)$$
- Attention, la calculatrice ne donne que la solution dans l'intervalle $[0\,;\pi]$

A) sin *x* = sin *a*



Propriété :

$$\sin x=\sin a \iff x=a+2k\pi \text{ ou } x=\pi-a+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$

Remarques :

- Graphiquement, il existe deux points M et M' , symétriques par rapport à (OJ) sur le cercle trigonométrique C qui correspondent à des angles qui ont le même sinus. On retrouve la formule des angles associés :
$$\sin(\pi-x)=\sin(x)$$
- Attention, la calculatrice ne donne que la solution dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$