PRODUIT SCALAIRE : exercices - page 1

Normes, angles orientés de vecteurs, projections orthogonales

Ex 1 : ***Vrai ou faux - restituer les notions du cours***

1) $\|\vec{AB}\|=\|\vec{BA}\|$
2) $\|-5\vec{u}\|=-5\|\vec{u}\|$
3) Si $\|\vec{u}\|=3$ et $\|\vec{v}\|=4$, alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|=7$
4) Si I est le milieu de [AB], alors $\|\vec{AB}\|=\|\vec{AI}\|+\|\vec{IB}\|$
5) Si A, B et C sont trois points alignés, alors $\|\vec{AC}\|=\|\vec{AB}\|+\|\vec{BC}\|$

Pour les questions 6, 7 , 8 et 9 , on considère un triangle équilatéral.
6) $(\vec{AB},\vec{AC})=(\vec{BC},\vec{BA})$ 7) $(\vec{AB},\vec{AC})=(\vec{AC},\vec{AB})$
8) $(\vec{CA},\vec{BA})=(\vec{AC},\vec{CB})$ 9) $(\vec{AB},\vec{AC})=(\vec{BA},\vec{CA})$

10) Si les projections orthogonales de deux vecteurs sont égales, alors ces deux vecteurs sont égaux.
11) Si $\vec{AB}$ a pour projeté orthogonale $\vec{A'B'}$ sur une droite d , alors ABB'A' est un parallélogramme.
12) Si ABCD est un parallélogramme, alors le projeté orthogonal de $\vec{AB}$ sur une droite d est égal au projeté orthogonal de $\vec{DC}$ sur d .
13) Le projeté orthogonal d'un parallélogramme est un parallélogramme aplati.
14) Si $\vec{u'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur une droite d , alors $\|\vec{u'}\|\leqslant\|\vec{u}\|$
15) Si $\vec{u'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur une droite d , alors $3\vec{u'}$ est le projeté orthogonal de $3\vec{u}$ sur d .

Ex 2 : ***Normes***

Soit un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Dans chacun des cas suivants, calculer la norme du vecteur $\vec{u}$ ou du vecteur $\vec{AB}$.

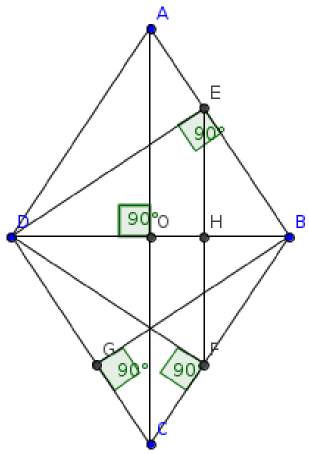
1) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ 2) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-5\\\sqrt{3}+5\end{pmatrix}$ 3) $A\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$

Ex 3 : ***Projection orthogonale***

ABCD est un losange de centre O.
ABD est un triangle équilatéral.

Déterminer les projections orthogonales suivantes :

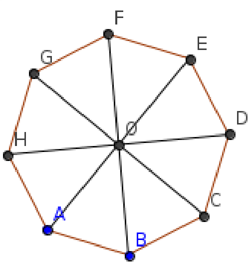
1) $\vec{AB}$ sur (BD)
2) $\vec{AD}$ sur (DE)
3) $\vec{AD}$ sur (DF)
4) $\vec{DE}$ sur (DB)
5) $\vec{DE}$ sur (BG)
6) $\vec{EF}$ sur (AC)



Ex 4 : ***Angles orientés de vecteurs***

Dans le plan orienté, on considère l'octogone régulier ABCDEFG de centre O.

Déterminer en radian la mesure principale des angles orientés de vecteurs suivants :



1) $(\vec{OA},\vec{OB})$ 2) $(\vec{BA},\vec{BO})$
3) $(\vec{OA},\vec{CO})$ 4) $(\vec{GD},\vec{BA})$
5) $(\vec{DH},\vec{CD})$ 6) $(\vec{EF}\ \vec{AH})$ 7) $(\vec{EH},\vec{DB})$

Les différentes expressions du produit scalaire

Ex 5 : ***Vrai ou faux - restituer les notions du cours***

1) Si $\|\vec{u}\|=5$, $\|\vec{v}\|=12$ et $\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{1}{3}$, alors $\vec{u}\,.\,\vec{v}=20$

2) $\vec{AB}\,.\,\vec{AC}=\vec{CA}\,.\,\vec{BA}$

Pour les questions 3 , 4 et 5, on considère que $\vec{AB}=\vec{CD}$ et $\vec{EF}=\vec{GH}$

3) $\vec{AB}\,.\,\vec{EF}=\vec{CD}\,.\,\vec{GH}$ 4) $\vec{AB}\,.\,\vec{EF}=\vec{GH}\,.\,\vec{CD}$ 5) $\vec{AA}\,.\,\vec{CD}=\vec{0}$

6) Si les points A, B et C sont alignés, alors $\vec{AB}\,.\,\vec{AC}=AB\times AC$

Pour les dernières questions, on considère un triangle ABC rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.

7) $\vec{AB}\,.\,\vec{AC}=0$ 8) $\vec{AH}\,.\,\vec{AB}=0$ 9) $\vec{CA}\,.\,\vec{CB}>0$

10) $\vec{HC}\,.\,\vec{CA}>0$ 11) $\vec{HB}\,.\,\vec{HC}=-\vec{BH}\,.\,\vec{HC}$

12) $\vec{AB}\,.\,\vec{BC}=\vec{HB}\,.\,\vec{BC}$ 13) $\vec{AB}\,.\,\vec{BC}=AB^2$

Ex 6 : ***Choisir la méthode la plus adaptée***

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer $\vec{AB}\,.\,\vec{AC}$.

1) $AB=4$, $AC=5$ et $\widehat{BAC}=45°$

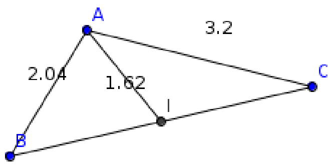
2) AB=2 , AC=7 et $(\vec{AB},\vec{AC})=\frac{5\pi}{6}$

3) Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on a A(2;3) , B(-4;5) et C(-5;-7)

4) ABCD est un losange dont la longueur des côtés vaut 4 et tel que $\widehat{ADC}=\frac{\pi}{6}$. On donnera une approximation à 10^{-1} près.

5) I est le milieu de [BC]

On donnera une approximation à 10^{-1} près.



Ex 7 : ***Choisir la méthode la plus adaptée***
Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1) Soit ABCD un carré de côté 4 et E, le point du segment [AC] tel que AE=0,4AC.

Calculer $\vec{AD}\,.\,\vec{AE}$

2) On considère l'octogone de la figure 4 avec HD=8.
Calculer : $\vec{OD}\,.\,\vec{OG}$, $\vec{FB}\,.\,\vec{FD}$, $\vec{AD}\,.\,\vec{AH}$ et $\vec{FB}\,.\,\vec{FA}$

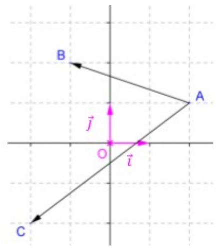
3) ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm. I est le milieu de [BC].
Calculer : $\vec{BA}\,.\,\vec{BC}$, $\vec{CA}\,.\,\vec{CI}$ et $(\vec{AB}-\vec{AC})\,.\,\vec{AI}$

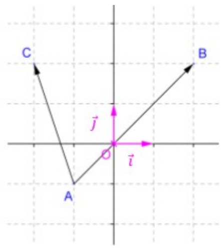
Calculer un angle ou une longueur avec le produit scalaire

Ex 8 : ***Déterminer un angle***

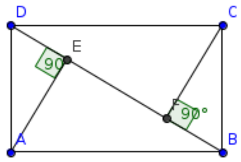
1) Dans chacun des cas calculer $\vec{AB}\,.\,\vec{AC}$.

2) En déduire $\widehat{BAC}$





Ex 9 : ***Déterminer une longueur***



On considère un rectangle ABCD tel que AB=5 et AD=3.
Les points E et F sont les projetés orthogonaux des points A et C sur la droites (BD).
En calculant de deux façons différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$, déterminer la valeur exacte de la longueur EF.

Ex 10 : ***Déterminer l'angle au sommet d'un triangle isocèle***

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A(-3;2), B(-1;5) et C(1;2).
Montrer que le triangle ABC est isocèle et donner une mesure de son angle au sommet en degré à 10^{-1} près.

Propriétés – Opérations vectorielles

Ex 11 : ***Vrai ou faux - restituer les notions du cours***

1) Si $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{t}$, alors $\vec{v}=\vec{t}$

2) Si $\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2$, alors $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$

3) Si $\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2$, alors $\vec{u}=\vec{v}$ ou $\vec{u}=-\vec{v}$

4) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $4\vec{u}$ et $-5\vec{v}$ sont orthogonaux.

5) Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$

Pour les dernières questions, on considère un triangle équilatéral ABC et H le pied de la hauteur issue de A.
6) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AH^2$ 7) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0{,}5\,AB^2$ 8) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}=0{,}75\,AB^2$

Ex 12 : ***Quelques calculs***

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u}.\vec{v}=8$
Calculer :
1) $\vec{u}.(3\vec{u}-2\vec{v})$ 2) $(\vec{u}-5\vec{v}).(3\vec{u}-2\vec{v})$ 3) $(\vec{u}-3\vec{v})^2$
4) $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ 5) $\|\vec{u}-\vec{v}\|$ 6) $\|2\vec{u}-5\vec{v}\|$

Ex 13 :

1) Existe-t-il deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\,\vec{u}.\vec{v}<0$

2) Montrer que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2)$

3) Peut-on déterminer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}-\vec{v}\|$

Ex 14 :

Soit 4 points A, B , C et D tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=4$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3$.
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

Orthogonalité et alignement

Ex 15 : ***Vecteurs orthogonaux ?***

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Dans chacun des cas, dire si les vecteurs sont orthogonaux :

1) $\vec{u}\begin{pmatrix}4876\\-4898873\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}317019173\\315539\end{pmatrix}$

2) $\vec{w}\begin{pmatrix}18^{497}\\17^{512}\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}17^{513}\\18^{498}\end{pmatrix}$

3) $\vec{w}\begin{pmatrix}18^{497}\\306^{43}\end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix}-17^{497}\\306^{454}\end{pmatrix}$

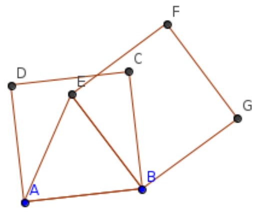
Ex 16 : ***Triangle rectangle***

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
On donne $M(2;\lambda)$, $A(1;3)$ et $L(4;3-\lambda)$.
Déterminer le(s) réel(s) λ tel que le triangle MAL soit rectangle en A.

Ex 17 : ***Démontrer que des droites sont perpendiculaires***

Soit ABCD un carré de côté a, I le milieu de [AB] et J le milieu de [AD].
Démontrer que les droites (CJ) et (DI) sont perpendiculaires.

Ex 18 : ***Démontrer que des points sont alignés***



Soit ABE un triangle équilatéral de côté a, le carré ABCD contenant E et le carré EBGF contenant C.
1) Exprimer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB}$ en fonction de a.
2) Montrer que BCG est un triangle équilatéral.
3) Exprimer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{EF}$ en fonction de a.
4) Exprimer $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EF}$ en fonction de a.
5) En déduire la valeur de $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{BF}$.
6) Démontrer que les point D, E et G sont alignés.

Ex 19 : ***Caractériser un quadrilatère***

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.
D et E sont les points tels que $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
1) Exprimer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de a.
2) Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3) Démontrer que les droites (AC) et (DE) sont perpendiculaires.
4) On note H le point d'intersection des droites (AC) et (DE).
Exprimer $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$ en fonction de a, puis déterminer la distance AH.
5) En déduire la nature du quadrilatère EBHC.

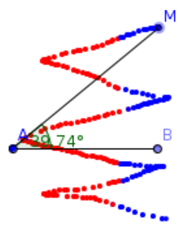
Ensemble de points

Ex 20 : ***Conjecture avec GeoGebra***
(consulter produit_scalaire_geo20.html)

Soit A et B deux points tels que AB=4 cm . On cherche l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=k$, $(k\in\mathbb{R})$.
1) Dans GeoGebra, placer deux points A et B tels que AB=4.

2) Créer un point libre M puis une expression « ps » permettant de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$.
(Utiliser la formule avec les normes et les angles)

3) Créer un curseur « k » variant de -20 à 20, puis définir un affichage conditionnel de M en bleu lorsque ps>k et rouge lorsque ps<k.
(Clic droit sur le point>propriétés>avancé>couleurs dynamique)



4) Choisir k=12, puis activer la trace de M et balayer la zone de construction jusqu'à pouvoir conjecturer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=12$.
Démontrer cette conjecture.

5) Même question avec k=-6.