PRODUIT SCALAIRE (dans le plan)

1) PRODUIT SCALAIRE

A) DÉFINITION

➔ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Ce n'est pas une multiplication !

Le produit scalaire de $\vec{u}$ **par** $\vec{v}$ noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre défini par l'une ou l'autre des égalités ci-dessous :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$$

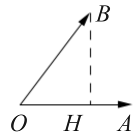
$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$ où $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans **un repère orthonormal** quelconque.

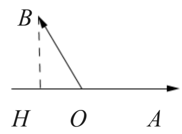
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=OA\times OB\times\cos\widehat{AOB}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit de leurs normes par le cosinus de l'angle qu'ils forment.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\begin{cases}OA\times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens}\\ -OA\times OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire}\end{cases}$$

où O , A et B sont trois points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.





H est le projeté orthogonal de B sur (OA)

*Le produit scalaire de deux vecteurs est **un réel***

➔ Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, on pose $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Preuve de l'égalité de ces quatre expressions :

- Montrons que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)=xx'+yy'$ où $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans un repère orthonormal quelconque.

$\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ donc:

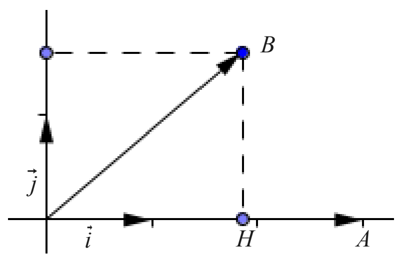
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=(x+x')^2+(y+y')^2=x^2+x'^2+2xx'+y^2+y'^2+2yy'$ et donc:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)&=\frac{1}{2}\left[(x^2+x'^2+2xx'+y^2+y'^2+2yy')-(x^2+y^2)-(x'^2+y'^2)\right]\\&=\frac{1}{2}(x^2+x'^2+2xx'+y^2+y'^2+2yy'-x^2-y^2-x'^2-y'^2)\\&=\frac{1}{2}(2xx'+2yy')=xx'+yy'\end{aligned}$$

- Montrons que $OA\times OB\times\cos\widehat{AOB}=xx'+yy'$ où $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont les coordonnées respectives de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans un repère orthonormal bien choisi …

Choisissons un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OA}$ soient colinéaires et de même sens.
On note $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ les coordonnées respectivement de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

On a alors: $x=OA$, $y=0$, $x'=OB\cos\widehat{AOB}$ et $y'=OB\sin\widehat{AOB}$
Ainsi $xx'+yy'=OA\times OB\cos\widehat{AOB}+0\times OB\sin\widehat{AOB}$
Donc $xx'+yy'=OA\times OB\cos\widehat{AOB}$.



- Montrons que $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$

  Dans le repère défini ci-dessus, l'abscisse de H est celle de B, c'est à dire $OB \cos \widehat{AOB}$.
  Ainsi $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = OA \times x_H$

  Deux cas se présentent :

  - Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens, alors $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de même sens et $x_H = OH$;
  d'où $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = OA \times OH$

  - Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire, alors $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont de sens contraire et $x_H = -OH$;
  d'où $OA \times OB \times \cos \widehat{AOB} = -OA \times OH$

Exemple 1 :

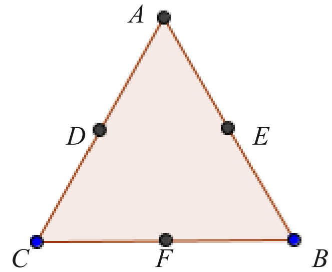
Soit A $(2\,;3)$, B $(-1\,;4)$ et C $(-2\,;1)$ trois points du plan muni d'un repère orthonormal.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = (-3)\times(-1)+(-3)\times 1 = 0$

Exemple 2 :

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 3$.
(dans l'unité de longueur choisie).

Les points E, F et D sont les milieux des côtés. On a alors:



- $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \widehat{BAC} = 3 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{2}$
  ou $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AE = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$.

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE} = AB \times CE \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CE}\right) = AB \times CE \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
  ou le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CE}$ sur (AB) est le vecteur nul, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CE} = 0$

B) REMARQUES

- Signe du produit scalaire :
On déduit facilement le signe du produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ suivant la nature de l'angle $\widehat{AOB}$.
En effet les normes des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont positives . On en déduit donc que $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ est du signe de $\cos \widehat{AOB}$.

- Si $0 \leqslant \widehat{AOB} < \frac{\pi}{2}$, $\cos \widehat{AOB} > 0$ et donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} > 0$
- Si $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$, c'est à dire $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, $\cos \widehat{AOB} = 0$ et donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 0$
- Si $\frac{\pi}{2} < \widehat{AOB} \leqslant \pi$, $\cos \widehat{AOB} < 0$, donc $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} < 0$

- Le produit scalaire de deux vecteurs dépend de leur norme :

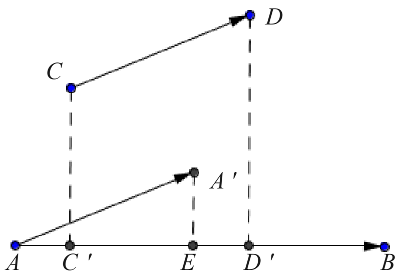
le cosinus d'un angle est un réel compris entre 1 et – 1 . On a donc:

$$-\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \leqslant \vec{u}\cdot\vec{v} \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$

- Un cas agréable : les vecteurs colinéaires

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors $(\vec{u}\,,\vec{v}) = 0$ et $\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = 1$, alors $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors $(\vec{u}\,,\vec{v}) = \pi$ et $\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = -1$, alors $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v} = -\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$

C) COMPLÉMENTS SUR LES PROJECTIONS ORTHOGONALES



- D'après ce qui précède, on peut compléter la quatrième égalité du tableau :
  $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$
  En effet $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}=\begin{cases} OA\times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA\times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraires}\end{cases}$
- On a considéré les vecteurs de même origine, mais le résultat est le même dans les autres cas.
  Si $C\,'$ et $D\,'$ sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB),
  alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$

Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs, on peut remplacer l'un deux par son projeté orthogonal sur la droite qui porte l'autre.

2) PROPRIÉTÉS

A) OPÉRATIONS VECTORIELLES

Propriété :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel, on a :

Symétrie: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

Linéarité: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ **et** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
$(k\,\vec{u})\cdot\vec{v}=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$ **et** $\vec{u}\cdot(k\,\vec{v})=k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Conséquence :

$a\cdot\vec{u}\cdot b\cdot\vec{v}=ab\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}$

(où a et b sont deux réels quelconques)

Preuve :

Pour la preuve, on se place dans un repère orthonormal et on note $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

- **Symétrie:** Immédiat, puisque $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'=x'x+y'y=\vec{v}\cdot\vec{u}$
- **Linéarité:**
$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) &= x\,(x'+x'')+y\,(y'+y'')\\ &= xx'+xx''+yy'+yy''\\ &= xx'+yy'+xx''+yy''\\ &= \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}\end{aligned}$$
  On démontre de même les autres égalités.

Exemples :

- Calculer $(3\,\vec{u}-2\,\vec{v})\cdot(2\,\vec{u}+\vec{v})=$
- Expliquer pourquoi les écritures suivantes n'ont pas de sens :
  - «$\vec{u}\cdot\vec{v}\cdot\vec{w}$»
  - «$\vec{u}.\vec{v}+\vec{w}$»
  - « $\vec{u}\cdot(k+\vec{v})$ »

Remarque :

Il y a des ressemblances évidentes entre les règles de calcul du produit scalaire et celles sur les réels, mais **attention** il ne faut pas généraliser :
- En effet, on peut avoir en particulier $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ avec $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$.
- D'autre part $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ n'implique pas $\vec{v}=\vec{w}$.

B) CARRÉ SCALAIRE ET NORME

Définition :

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui même, $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$
On a : $\vec{u}^2=\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{u}\|=\|\vec{u}\|^2$
Ce qui donne, pour deux points A et B : $\overrightarrow{AB}^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$

Remarques :

- Un vecteur $\vec{u}$ est unitaire si et seulement si $\vec{u}^2=1$.
- Après quelques calculs, on retrouve **des produits scalaires remarquables** (bien familiers ...)

$(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2+2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$ $\quad$ $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2+\vec{v}^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}$ $\quad$ $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

3) PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

Preuve :

- Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, le résultat est évident.
- Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Or $\|\vec{u}\| \neq 0$ et $\|\vec{v}\| \neq 0$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \; (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

Remarques:

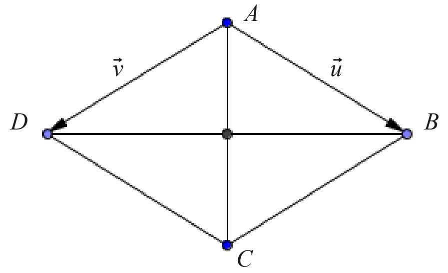
- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan.
- On ne modifie pas le produit scalaire de deux vecteurs en ajoutant à l'un d'eux un vecteur orthogonal à l'autre.
  Si $\vec{w} \perp \vec{u}$, alors
  $$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} + 0 = \vec{u} \cdot \vec{v}$$
- Dans un repère orthonormal, le produit scalaire de $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
  On en déduit que: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \boldsymbol{xx' + yy' = 0}$

Exemple :

En posant $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, on retrouve que le parallélogramme $ABCD$ est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires.

$(\vec{u}+\vec{v}) \cdot (\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Ainsi $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux.



4) COORDONNÉES D'UN VECTEUR

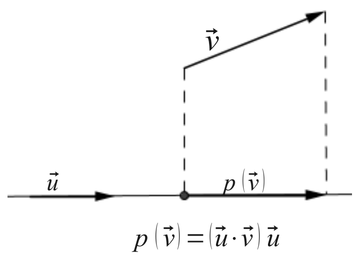
Propriété :

La projection orthogonale d'un vecteur $\vec{v}$ sur un axe d muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ est $(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{u}$.

Preuve :

Appelons $p(\vec{v})$ ce projeté.
$p(\vec{v})$ est colinéaire à $\vec{u}$, il existe donc un réel k tel que $p(\vec{v}) = k \cdot \vec{u}$.

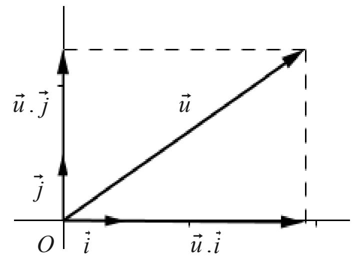
De plus on a vu que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot p(\vec{v})$
Ainsi $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\,\vec{u}) = k\,\vec{u}^2 = k$ (car $\vec{u}$ est unitaire)
On en déduit que $p(\vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{u}$



Une conséquence pour les coordonnées d'un vecteur :

Propriété :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal et $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur du plan.
On a : $a = \vec{u} \cdot \vec{i}$ et $b = \vec{u} \cdot \vec{j}$



Le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $(O; \vec{i})$ est $a \cdot \vec{i}$ mais aussi $(\vec{u} \cdot \vec{i})\,\vec{i}$
De même pour b…