COLINÉARITÉ ET ÉQUATIONS DE DROITES

1) BASE ET REPÈRE

A) COORDONNÉES D'UN POINT

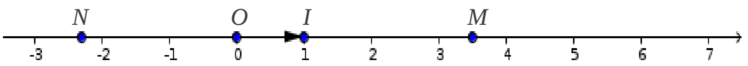
➔ **Repérage sur une droite :**

Choisir un repère sur une droite d , c'est se donner deux points distincts O et I de d , pris dans cet ordre . O est l'**origine du repère**.
Posons alors $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$.
Le vecteur $\vec{i}$ est appelé **vecteur de base** . Le repère est noté $(O\,;\vec{i})$.

Définition :

L'abscisse du point M de d dans le repère $(O\,;\vec{i})$ est le **réel** x tel que $\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}$.

Exemples : $\overrightarrow{OM}=\frac{7}{2}\vec{i}$ signifie que M a pour abscisse $\frac{7}{2}$ dans le repère $(O\,;\vec{i})$.
N a pour abscisse $-2{,}3$ dans le repère $(O\,;\vec{i})$ signifie que $\overrightarrow{ON}=-2{,}3\,\vec{i}$.



➔ **Repérage dans le plan :**

Définition :

$(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est un **repère** du plan . Il est constitué d'un point O appelé **origine** du repère et d'une **base** $(\vec{i},\vec{j})$, c'est à dire deux vecteurs non colinéaires pris dans cet ordre.

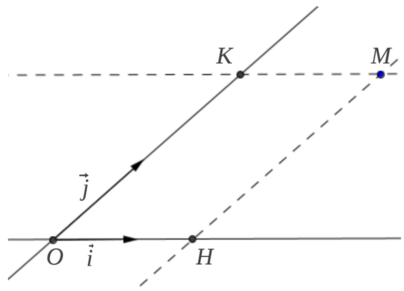
Remarques :

- Lorsque les directions des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires, la base $(\vec{i},\vec{j})$ est orthogonale et le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est **orthogonal**.
- Une unité de longueur étant choisie, si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires et ont pour norme 1, alors la base $(\vec{i},\vec{j})$ est orthonormale et le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est **orthonormal** . (On dit aussi orthonormé)

Coordonnées d'un point dans un repère :

Soit M un point du plan muni du repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
En traçant la parallèle à chaque axe passant par M, on obtient deux points H et K.
Il existe un unique réel x et un unique réel y tels que $\overrightarrow{OH}=x\cdot\vec{i}$ et $\overrightarrow{OK}=y\cdot\vec{i}$
On a alors $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OK}$, c'est à dire $\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$.

On dit que $(x\,;y)$ est le **couple des coordonnées** du point M dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

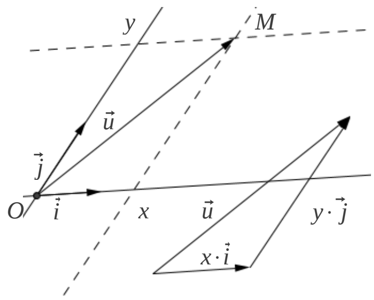


B) COORDONNÉES D'UN VECTEUR

Dans ce paragraphe, un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan est fixé.

$\vec{u}$ est un vecteur donné.
M est le point tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.
Notons $(x\,;y)$ les coordonnées du point M.
Alors $\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$. Donc $\vec{u}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$.

Ainsi tout vecteur du plan peut s'écrire sous la forme: $\vec{u}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$



Définition :

Dire que le vecteur $\vec{u}$ a pour **coordonnées** $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ signifie que $\vec{u}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$.

On note $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Remarque : On dit aussi que le vecteur $\vec{u}$ a pour **coordonnées** $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

2) CONDITION DE COLINEARITÉ

Propriété :

Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ fixé, dire que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont **colinéaires** équivaut à dire que $xy'-x'y=0$.

Preuve :

- Dans le cas où $\vec{u}$ (ou $\vec{v}$) est nul, le résultat est immédiat.
- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

La colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ équivaut à la proportionnalité des coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, c'est à dire à l'égalité $xy'-x'y=0$.

D'où le résultat.

Exemple :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$, alors $xy'-x'y=\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=0$ et donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3) ÉQUATIONS DE DROITES

Dans ce paragraphe, un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ du plan est fixé.

A) VECTEURS DIRECTEURS

Définition :

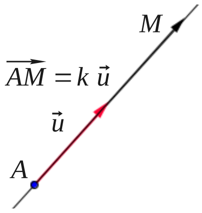
Soit d une droite du plan.
On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur $\vec{u}$ non nul tel qu'il existe deux points distincts A et B de d tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

Remarques :

- Un vecteur directeur indique la direction de d . On dit aussi que le vecteur directeur dirige la droite.
- Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.
- Deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété :

Soit d une droite, A un point de d et $\vec{u}$ un vecteur directeur de d.
La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.



Remarque : Une droite est parfaitement déterminée par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}\neq 0$.

B) ÉQUATIONS CARTÉSIENNES D'UNE DROITE

Définition :

Soit d une droite du plan.
On appelle équation de d toute relation vérifiée par les coordonnées $(x\,;\,y)$ des points de d.

Exemple :

Soit d la droite d'équation $y=2x-1$.
Cela signifie que les coordonnées x et y de n'importe quel point de d vérifient la relation $y=2x-1$.
Pour qu'un point appartienne à d, il faut et il suffit que ses coordonnées vérifient l'équation de d.
Par exemple le point $A(2\,;3)$ appartient à d car on a bien $3=2\times 2-1$
En revanche le point $B(1\,;\,4)$ n'appartient à D car $4\neq 2\times 1-1$

Remarque :

Il n'y a pas unicité de l'équation d'une droite car si $y=2x-1$ est une équation de la droite d, $2y=4x-2$ en est une autre, ainsi que $2x-y-1=0$

Cas particuliers :

- $x=4$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées (une droite dont tous les points ont même abscisse)
- $y=3$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses (une droite dont tous les points ont même ordonnée)

Exemple : Déterminer l'équation de la droite d passant par $A(1;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Soit $M(x;y)$ un point du plan.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}$

$M\in d$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est à dire :

$$(x-1)\times 1-(-1)\times(y-2)=0 \Leftrightarrow x-1+y-2=0 \Leftrightarrow x+y-3=0 \Leftrightarrow y=-x+3$$

Propriétés :

- Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ où a, b et c sont trois réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls.

  Cette équation est appelée équation cartésienne de d. Un vecteur directeur de cette droite est alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

- Dans le cas particulier où $b\neq 0$, c'est-à-dire si la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées (c'est-à-dire si ses vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires à $\vec{j}$), d admet une équation de la forme $y=mx+p$ où m et p sont deux réels.

  Cette équation est appelée **équation réduite** de d.

  Un vecteur directeur de cette droite est alors le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ où m est **le coefficient directeur** de d.

- Toute droite d parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x=k$ où k est un réel.

Preuve :

• Toute droite d étant définie de manière unique par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur non nul, on note :

$A(x_0;y_0)$ un point de d et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ un de ses vecteurs directeurs (α et β ne sont pas simultanément nuls)

Soit $M(x;y)$ un point du plan.

M appartiendra à d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est à dire :

$$(x-x_0)\beta-(y-y_0)\alpha=0 \Leftrightarrow \beta x-\alpha y+\alpha y_0-\beta x_0=0$$

En posant $a=\beta$, $b=-\alpha$ et $c=\alpha y_0-\beta x_0$, on constate que l'équation de la droite d est de la forme $ax+by+c=0$ où a et b ne sont pas simultanément nuls (car α et β et ne le sont pas).

$\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de d.

Réciproquement, si l'équation d'un ensemble de points $M(x;y)$ est de la forme $ax+by+c=0$,

alors soit $A(x_0;y_0)$ un point de cet ensemble, vérifiant $ax_0+by_0+c=0$.

Par soustraction membre à membre des deux égalités, il vient $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \Leftrightarrow a(x-x_0)-(-b)(y-y_0)=0$,

ce qui est la condition de colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$ est donc la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ passant par $A(x_0;y_0)$.

• Si $b\neq 0$, l'équation $ax+by+c=0$ se réécrit donc sous la forme $y=mx+p$ avec $m=-\dfrac{a}{b}$ et $p=-\dfrac{c}{b}$.

Un vecteur directeur de cette droite étant $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$, un autre est $\vec{v}=\dfrac{-1}{b}\vec{u}$ c'est-à-dire $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

• Si d est parallèle à l'axe des ordonnées, alors un de ses vecteurs directeurs est $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$ avec $a\neq 0$.

Puisque $b=0$ et $a\neq 0$, une équation de d est donc $ax+c=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{c}{a}$ qui est de la forme $x=k$ ($k\in\mathbb{R}$).