SUITES NUMÉRIQUES : GÉNÉRALITÉS

1) DÉFINITION et NOTATIONS

Définition :

On appelle **suite numérique**, toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Une suite se note u , $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geq 0}$ ou (u_n) , qui est la notation la plus utilisée.

On note u_n **l'image** de l'entier naturel n . (plutôt que $u(n)$ …)
On dit que u_n est **le terme général** de la suite (u_n) , **le terme de rang n** ou **le terme d'indice n**.
u_0 est le **terme initial** de la suite (u_n) .

- (u_n) désigne une suite.
- u_n désigne un nombre.

Comment présenter une suite :

- On peut présenter une suite sous forme de liste : « on considère la suite $(1, 2^2, 3^2, \dots, n^2)$ »
- Le plus souvent, on la présente par son terme général : « soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2$ »

Exemples :

- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3\times n+10$
  Le terme d'indice 2 est $u_2 = 16$, le terme d'indice 10 est $u_{10} = 40$, le terme d'indice $2n$ est $u_{2n} = 6n+10$ …

- La suite des nombres impairs a pour terme général $u_n = 2\times n+1$.

Complément :

Une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang n_0 ; on la note parfois $(u)_{n\geqslant n_0}$ et son **terme initial** est u_{n_0}

- La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-4}$, n'est définie que pour $n \geqslant 4$, on la note $(u_n)_{n\geqslant 4}$
- La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$, n'est définie que pour $n\geqslant 1$, on la note $(u_n)_{n\geqslant 1}$

Remarque : Comme pour les fonctions, on omet souvent de préciser l'ensemble de définition … attention .

2) DIFFÉRENTES FAÇONS DE DÉFINIR UNE SUITE …

A) PAR UNE FORMULE EXPLICITE

On peut définir une suite par une **formule explicite** , qui permet de calculer directement à partir de n le terme d'indice n .

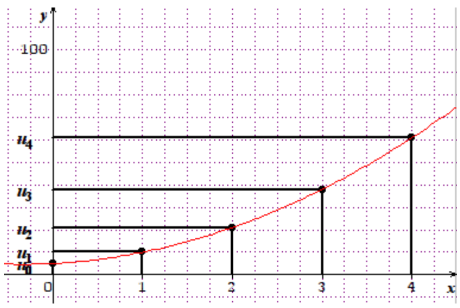
Exemples :

- La suite (u_n) définie par $u_n = 5^n$
- La suite (v_n) définie par $v_n = 3n^2+5$

Cas particulier important :

Soit f une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$. (au moins) .
On définit une suite (u_n) en posant, pour tout entier naturel n ,
$u_n = f(n)$.

On dispose alors, à partir de la courbe représentative de la fonction f ,
d'une représentation graphique de la suite (u_n) .
Sur l'axe des ordonnées, on peut lire les termes u_0 , u_1 , u_2 , …



Exemple :

Soit f la fonction définie sur par $f(x) = 3x^2+2x+5$ et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$.
Ainsi pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 3n^2+2n+5$.
Pour calculer le terme d'indice n , il suffit de chercher l'image de n par f .

On en déduit que : $u_0 = 5$, $u_1 = 10$, $u_2 = 21$, … , $u_{n+1} = 3(n+1)^2+2(n+1)+5 = 3n^2+8n+10$

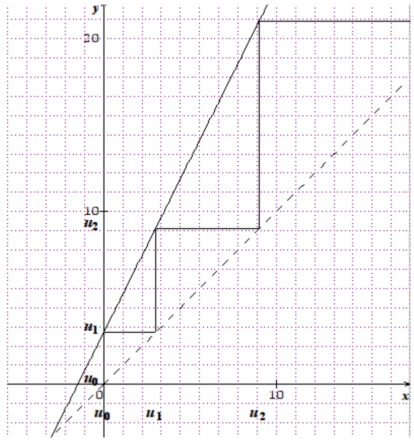
B) PAR RÉCURRENCE

On donne $u_0 = 0$ et on considère la relation $u_{n+1} = 2u_n+3$.
Ceci nous permet de calculer de **proche en proche** tous les termes de la suite (u_n) .
En effet : $u_1 = 2u_0+3 = 2\times 0+3 = 3$
$u_2 = 2u_1+3 = 2\times 3+3 = 9$
$u_3 = 2\times u_2+3 = 2\times 9+3 = 21$ …

Si l'on considère la fonction f définie sur par $f(x) = 2x+3$, alors on peut dire que la suite (u_n) est définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. (cette relation est appelée **relation de récurrence**)

De manière plus générale :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, telle que, pour tout réel $x \in I$, $f(x) \in I$. ($f(I) \subset I$)
On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de u_0 ($u_0 \in I$), et de **<u>la relation de récurrence</u>** $u_{n+1} = f(u_n)$.



En utilisant la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$, on dispose alors, d'une représentation graphique de la suite (u_n).
On peut lire les termes u_0, u_1, u_2, … sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

Dans la plupart des cas, par manque de place ou de lisibilité, on ne peut représenter que les premiers termes de la suite.

<u>Remarques :</u>

- La donnée de u_0 et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ ne permet pas toujours de définir une suite.
- La remarque « … $f(x)$ est aussi dans I … » est importante.

<u>Exemple :</u>

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2}{2-x}$.
Si $u_0 = 1$, alors $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2$.
Or f n'est pas définie en 2, donc $u_2 = f(u_1)$ n'est pas défini …

Chaque terme étant défini à partir du précédent, pour connaître le terme d'indice n, il faut d'abord calculer les $n-1$ termes qui le précèdent …

- Éviter la confusion entre les suites que l'on peut définir, avec la même fonction, par une formule explicite ou par récurrence.
  Soit f la fonction définie sur par $f(x) = 3x$, alors :
  « EXPLICITE » : $u_0 = f(0) = 0$, $u_1 = f(1) = 3$, $u_2 = f(2) = 6$ …
  « RECURRENCE avec $u_0 = 1$ » : $u_0 = 1$, $u_1 = f(u_0) = 3$, $u_2 = f(u_1) = 9$ …

<u>3) SUITES CROISSANTES , SUITES DÉCROISSANTES</u>

Les suites sont des fonctions particulières … il n'est donc pas étonnant de retrouver des définitions, déjà vues pour les fonctions, …

<u>Définition :</u>

- Une suite (u_n) est **<u>croissante</u>** si, pour tout entier naturel n, $u_n \le u_{n+1}$
  $u_0 \le u_1 \le u_2 \le \ldots \le u_n \le u_{n+1} \le \ldots$
- Une suite (u_n) est **<u>décroissante</u>** si, pour tout entier naturel n, $u_n \ge u_{n+1}$.
  $u_0 \ge u_1 \ge u_2 \ge \ldots \ge u_n \ge u_{n+1} \ge \ldots$
- Une suite (u_n) est **<u>monotone</u>** si elle est croissante ou décroissante.

*On définit de même ces notions **strictement**.*

<u>Remarques :</u>

- Si pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n+1}$, on dit que la suite est **<u>constante</u>**.
- S'il existe un entier naturel p tel que, pour tout entier $n \geqslant p$, on ait $u_n \leqslant u_{n+1}$, on dit que la suite est croissante à partir du rang p. (de même pour les autres notions vues ci-dessus)
- Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes … (exemple : la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$)

<u>Comment fait-on dans la pratique ?</u>

- On étudie le signe de la **différence** $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$
- **<u>ou</u>**, si la suite est à termes strictement positifs (ou strictement négatifs), on compare le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

<u>Exemples :</u>

- Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - n - 2$.
  Pour tout entier naturel n, on a :
  $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - 2 - (n^2 - n - 2) = \ldots = 2n$
  Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, c'est à dire $u_{n+1} \geqslant u_n$; la suite (u_n) est donc croissante.

et pourtant la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 2$ n'est pas croissante sur ℝ

- Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{n}{2^n}$ ($n \geqslant 1$)

  Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

  $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2\,n}$; de plus $n \geqslant 1$, donc $n+1 \leqslant 2\,n$, et $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$.

  Or $v_n > 0$, donc $v_{n+1} \leqslant v_n$; la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est donc décroissante.

4) SUITES BORNÉES

Définition :

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \leqslant M$.
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \geqslant m$.
- Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Comme pour les fonctions, on dit que M (respectivement m) est **un majorant** (respectivement **minorant**) de la suite.

Exemples :

- Une suite croissante est minorée par son terme initial ; une suite décroissante est majorée par son terme initial.
- Soit la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$.

  Pour tout entier naturel n , on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $0 \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant 1$; donc $-1 \leqslant u_n \leqslant 2$

  La suite (u_n) est donc bornée .

Remarque :

S'il existe un entier naturel p tel que, pour tout entier $n \geqslant p$, on ait $u_n \leqslant M$, on dit que la suite est majorée par M à partir du rang p.
(de même pour les autres notions vues ci-dessus)

5) LE COTE AGRÉABLE DES SUITES $u_n = f(n)$

Si une suite est de la forme $u_n = f(n)$, on déduit rapidement, à partir des propriétés de la fonction f , des résultats sur la suite.
On montre facilement que :

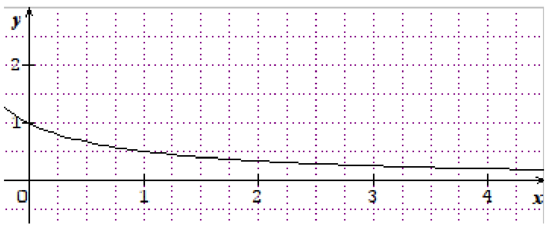
- Si f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est décroissante.
- Si f est majorée sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est majorée.
- Si f est minorée sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est minorée.

Les réciproques sont fausses

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ et la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.
f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

On en déduit que (u_n) est aussi décroissante et bornée .



6) LIMITE D'UNE SUITE

Soit une suite (u_n).

cas 1

Intuitivement, si ***« u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est assez grand »*** , alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

cas 2

Intuitivement, si les termes u_n finissent par être négatifs et ***« si u_n est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que n est assez grand »***, alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme $]-\infty\,; A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 = -\infty$

Remarque : $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} -u_n = +\infty$

cas 3 (suite convergente)

Soit L un réel donné.

Intuitivement, dire que (u_n) a pour limite L , signifie que lorsque n est de plus en plus grand, **« les nombres u_n correspondants viennent s'accumuler autour de** L».

On note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Remarque :

Si une suite (u_n) a une limite finie L , alors la limite L est unique.

cas 4

Aucun des trois cas ne se produit.

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ prend successivement les valeurs 1 et -1.
Ainsi (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$, n'a pas pour limite $-\infty$ et n'a pas pour limite un réel.

Remarque : Une suite qui ne converge pas est **divergente**. (cas 1 , cas 2 , cas 4)