SUITES NUMÉRIQUES : GÉNÉRALITÉS

1) DÉFINITION et NOTATIONS

Définition :

On appelle **suite numérique**, toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Une suite se note u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\geq 0}$ ou (u_n) , qui est la notation la plus utilisée.

On note u_n **l'image** de l'entier naturel n . (plutôt que $u(n)$ …)
On dit que u_n est **le terme général** de la suite (u_n) , **le terme de rang n** ou **le terme d'indice n**.
u_0 est le **terme initial** de la suite (u_n) .

- (u_n) désigne une suite.
- u_n désigne un nombre.

Comment présenter une suite :

- On peut présenter une suite sous forme de liste : « on considère la suite $(1, 2^2, 3^2, \dots, n^2)$ »
- Le plus souvent, on la présente par son terme général : « soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2$ »

Exemples :

- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3\times n+10$
  Le terme d'indice 2 est $u_2 = 16$, le terme d'indice 10 est $u_{10} = 40$, le terme d'indice $2n$ est $u_{2n} = 6n+10$ …
- La suite des nombres impairs a pour terme général $u_n = 2\times n+1$.

Complément :

Une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang n_0 ; on la note parfois $(u)_{n\geq n_0}$ et son **terme initial** est u_{n_0}

- La suite de terme général $u_n = \sqrt{n-4}$, n'est définie que pour $n \geqslant 4$, on la note $(u_n)_{n\geqslant 4}$
- La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$, n'est définie que pour $n \geqslant 1$, on la note $(u_n)_{n\geqslant 1}$

Remarque : Comme pour les fonctions, on omet souvent de préciser l'ensemble de définition … attention .

2) DIFFÉRENTES FAÇONS DE DÉFINIR UNE SUITE …

A) PAR UNE FORMULE EXPLICITE

On peut définir une suite par une **formule explicite** , qui permet de calculer directement à partir de n le terme d'indice n .

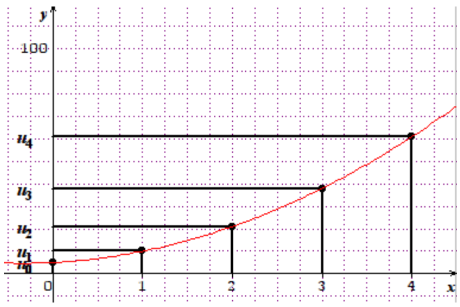
Exemples :

- La suite (u_n) définie par $u_n = 5^n$
- La suite (v_n) définie par $v_n = 3n^2+5$

Cas particulier important :

Soit f une fonction définie sur $[0 ;+\infty[$. (au moins) .
On définit une suite (u_n) en posant, pour tout entier naturel n ,
$u_n = f(n)$.

On dispose alors, à partir de la courbe représentative de la fonction f ,
d'une représentation graphique de la suite (u_n) .
Sur l'axe des ordonnées, on peut lire les termes u_0 , u_1 , u_2 , …



Exemple :

Soit f la fonction définie sur par $f(x) = 3x^2+2x+5$ et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$.
Ainsi pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 3n^2+2n+5$.
Pour calculer le terme d'indice n , il suffit de chercher l'image de n par f .

On en déduit que : $u_0 = 5$, $u_1 = 10$, $u_2 = 21$, … , $u_{n+1} = 3(n+1)^2+2(n+1)+5 = 3n^2+8n+10$

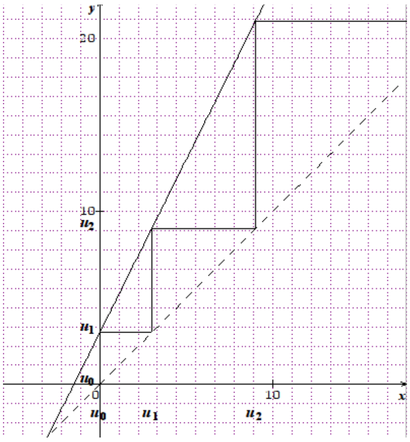
B) PAR RÉCURRENCE

On donne $u_0 = 0$ et on considère la relation $u_{n+1} = 2u_n+3$.
Ceci nous permet de calculer de **proche en proche** tous les termes de la suite (u_n) .
En effet :
$u_1 = 2u_0+3 = 2\times 0+3 = 3$
$u_2 = 2u_1+3 = 2\times 3+3 = 9$
$u_3 = 2\times u_2+3 = 2\times 9+3 = 21$ …

Si l'on considère la fonction f définie sur par $f(x) = 2x+3$, alors on peut dire que la suite (u_n) est définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. (cette relation est appelée **relation de récurrence**)

De manière plus générale :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, telle que, pour tout réel $x \in I$, $f(x) \in I$. ($f(I) \subset I$) On peut alors définir une suite (u_n) par la donnée de u_0 ($u_0 \in I$) , et de **la relation de récurrence** $u_{n+1} = f(u_n)$.



En utilisant la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $y = x$, on dispose alors, d'une représentation graphique de la suite (u_n) .
On peut lire les termes u_0, u_1 , u_2 , … sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées .

Dans la plupart des cas, par manque de place ou de lisibilité, on ne peut représenter que les premiers termes de la suite .

Remarques :

- La donnée de u_0 et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ ne permet pas toujours de définir une suite.
- La remarque « … $f(x)$ est aussi dans I … » est importante.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2}{2-x}$.
Si $u_0 = 1$, alors $u_1 = f(u_0) = f(1) = 2$.
Or f n'est pas définie en 2, donc $u_2 = f(u_1)$ n'est pas défini …

Chaque terme étant défini à partir du précédent, pour connaître le terme d'indice n, il faut d'abord calculer les $n-1$ termes qui le précèdent …

- Éviter la confusion entre les suites que l'on peut définir, avec la même fonction, par une formule explicite ou par récurrence.
Soit f la fonction définie sur par $f(x) = 3x$, alors :
« EXPLICITE » : $u_0 = f(0) = 0$, $u_1 = f(1) = 3$, $u_2 = f(2) = 6$ …
« RECURRENCE avec $u_0 = 1$ » : $u_0 = 1$, $u_1 = f(u_0) = 3$, $u_2 = f(u_1) = 9$ …

3) SUITES CROISSANTES , SUITES DÉCROISSANTES

Les suites sont des fonctions particulières … il n'est donc pas étonnant de retrouver des définitions, déjà vues pour les fonctions, …

Définition :

• Une suite (u_n) est **croissante** si, pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$ $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ldots$ • Une suite (u_n) est **décroissante** si, pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1}$. $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_n \geq u_{n+1} \geq \ldots$ • Une suite (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

*On définit de même ces notions **strictement** .*

Remarques :

- Si pour tout entier naturel n , $u_n = u_{n+1}$, on dit que la suite est **constante** .
- S'il existe un entier naturel p tel que, pour tout entier $n \geqslant p$, on ait $u_n \leqslant u_{n+1}$, on dit que la suite est croissante à partir du rang p . (de même pour les autres notions vues ci-dessus)
- Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes … (exemple : la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$)

Comment fait-on dans la pratique ?

- On étudie le signe de la **différence** $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$
- **ou** , si la suite est à termes strictement positifs (ou strictement négatifs), on compare le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 .

Exemples :

- Soit la suite (u_n) définie par $u_n = n^2 - n - 2$.
Pour tout entier naturel n , on a :
$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - (n+1) - 2 - (n^2 - n - 2) = \ldots = 2n$
Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, c'est à dire $u_{n+1} \geqslant u_n$; la suite (u_n) est donc croissante.

et pourtant la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x - 2$ n'est pas croissante sur ℝ

- Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{n}{2^n}$ ($n \geqslant 1$)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2\,n}$; de plus $n \geqslant 1$, donc $n+1 \leqslant 2\,n$, et $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant 1$.

Or $v_n > 0$, donc $v_{n+1} \leqslant v_n$; la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est donc décroissante.

4) SUITES BORNÉES

Définition :

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \leqslant M$.
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \geqslant m$.
- Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Comme pour les fonctions, on dit que M (respectivement m) est **un majorant** (respectivement **minorant**) de la suite.

Exemples :

- Une suite croissante est minorée par son terme initial ; une suite décroissante est majorée par son terme initial.
- Soit la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$.

Pour tout entier naturel n , on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$ et $0 \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant 1$; donc $-1 \leqslant u_n \leqslant 2$

La suite (u_n) est donc bornée .

Remarque :

S'il existe un entier naturel p tel que, pour tout entier $n \geqslant p$, on ait $u_n \leqslant M$, on dit que la suite est majorée par M à partir du rang p.
(de même pour les autres notions vues ci-dessus)

5) LE COTE AGRÉABLE DES SUITES $u_n = f(n)$

Si une suite est de la forme $u_n = f(n)$, on déduit rapidement, à partir des propriétés de la fonction f , des résultats sur la suite.
On montre facilement que :

- Si f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est décroissante.
- Si f est majorée sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est majorée.
- Si f est minorée sur $[0\,;+\infty[$, alors (u_n) est minorée.

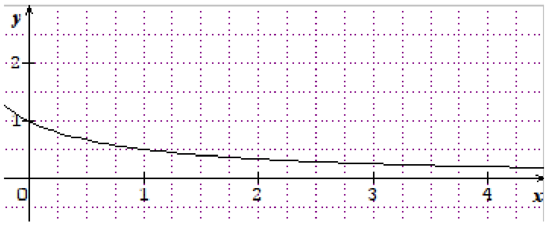
Les réciproques sont fausses

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ et la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

f est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x \in [0\,;+\infty[$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

On en déduit que (u_n) est aussi décroissante et bornée .



6) LIMITE D'UNE SUITE

Soit une suite (u_n).

cas 1

Intuitivement, si *« u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est assez grand »* , alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

On note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

cas 2

Intuitivement, si les termes u_n finissent par être négatifs et ***« si u_n est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que n est assez grand »***, alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

On note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme $]-\infty\,; A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim_{n \to +\infty} -n^2 = -\infty$

Remarque : $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} -u_n = +\infty$

cas 3 (suite convergente)

Soit L un réel donné.

Intuitivement, dire que (u_n) a pour limite L , signifie que lorsque n est de plus en plus grand, **« les nombres u_n correspondants viennent s'accumuler autour de L»**.

On note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Remarque :

Si une suite (u_n) a une limite finie L , alors la limite L est unique.

cas 4

Aucun des trois cas ne se produit.

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ prend successivement les valeurs 1 et -1.
Ainsi (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$, n'a pas pour limite $-\infty$ et n'a pas pour limite un réel.

Remarque : Une suite qui ne converge pas est **divergente**. (cas 1 , cas 2 , cas 4)