SUITES ARITHMÉTIQUES et SUITES GÉOMÉTRIQUES

1) SUITES ARITHMÉTIQUES

A) DÉFINITION PAR RÉCURRENCE

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique** , s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1}=u_n+r$.
Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n) .

r peut-être positif ou négatif .

Exemples :

- La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de raison 1 .
- La suite des entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2 .
- Soit (u_n) la suite définie par $u_n=4n+4$.
  Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+1}-u_n=4(n+1)+4-(4n-4)=4$
  Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+1}=u_n+4$ et (u_n) est une suite arithmétique de raison 4 .

L'astuce :
calculer $u_{n+1}-u_n$

Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite ((u_n) définie par $u_n=an+b$ (où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$) est une suite arithmétique de raison a et de premier terme b .

Et la réciproque ! ! !

B) DÉFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .
Alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_n=u_0+nr$

Preuve :
Additionnons membre à membre les n égalités ci-contre:

$$\begin{cases} u_1=u_0+r \\ u_2=u_1+r \\ \dots \\ u_{n-1}=u_{n-2}+r \\ u_n=u_{n-1}+r \end{cases}$$

On obtient : $u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+u_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+nr$

Et après simplification : $u_n=u_0+nr$

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique définie par $u_0=7$ et $r=12$, alors $u_6=7+6\times12=79$ …

Plus généralement :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
Pour tous entiers naturels p et q , on a : $u_p=u_q+(p-q)r$

Preuve : (Pour la preuve, on suppose que le premier terme de la suite est u_0)
On a $u_p=u_0+pr$ et $u_q=u_0+qr$, donc $u_p-u_q=pr-qr$ et $u_p=u_q+(p-q)r$

Intérêts :

- Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite arithmétique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)
- Cette formule permet aussi de calculer la raison d'une suite arithmétique dont on connaît deux termes.

Exemples :

- Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2=4$ et $u_4=10$.
  On a $u_4=u_2+(4-2)r$, donc $r=\ldots=3$
- Soit (u_n) une suite arithmétique définie par $u_{10}=30$ et $r=2$.
  On a $u_{20}=u_{10}+(20-10)2=50$

C) MONOTONIE

Les résultats suivants ne sont pas surprenants :
Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
- Si $r>0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r<0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r=0$, alors la suite (u_n) est constante.

D) SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Remarque préliminaire : NOMBRE DE TERMES D'UNE SOMME

u_1+u_2 est une somme de deux termes ; $u_1+u_2+u_3$ est une somme de trois termes
De manière générale, $u_1+u_2+\ldots+u_p$ est une somme de p termes .

Comment faire (*sans compter sur les doigts*) pour calculer le nombre de termes de la somme $u_{12}+u_{13}+\ldots+u_{56}$?
On peut écrire $u_{12}+u_{13}+\ldots+u_{56}=u_{1+11}+u_{2+11}+\ldots+u_{45+11}$
La somme a donc 45 termes, c'est à dire 56 – 12 + 1

Plus généralement :

Le nombre de termes de la somme $u_p+u_{p+1}+\ldots+u_q$ (p , q entiers naturels tels que $p\leqslant q$) est $\boldsymbol{q-p+1}$

Étude d'un exemple fondamental : SOMME DES n PREMIERS ENTIERS NATURELS

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n=n$.
Calculons la somme $S=u_1+u_2+\ldots+u_n=1+2+\ldots+n$.

On peut écrire : $S=1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$
$S=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1$
En additionnant membre à membre, on obtient :

$2S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{n\text{ fois}}$ c'est à dire $2S=n(n+1)$ et donc $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Cas général : En utilisant la même idée,
$S=a+(a+r)+(a+2r)+\ldots+b$
$S=b+(b-r)+(b-2r)+\ldots+a$

a et b sont les termes extrêmes de S, r est la raison de la suite

Propriété :

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au **produit du nombre de termes** par **la demi-somme des termes extrêmes** .

$S=\text{nombre de termes}\times\dfrac{\text{premier terme}+\text{dernier terme}}{2}$

Exemples :

- Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
  On a $S=u_7+u_8+\ldots+u_{15}=9\times\dfrac{u_7+u_{15}}{2}$
- Soit (v_n) la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $v_0=15$.
  On a $v_8=v_0+4\times8=15+32=47$
  On en déduit que $v_0+v_1+\ldots+v_8=9\times\dfrac{v_0+v_8}{2}=9\times\dfrac{15+47}{2}=279$

Remarques : Moyenne arithmétique

- Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors $b=\dfrac{a+c}{2}$
- De manière plus générale, si u_p, u_{p+1}, … , u_{p+n} sont $n+1$ termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors la moyenne arithmétique de ces termes est la moyenne arithmétique des termes extrêmes : $\dfrac{u_p+u_{p+n}}{2}$

2) SUITES GÉOMÉTRIQUES

A) DÉFINITION PAR RÉCURRENCE

Définition :

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** , s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_{n+1}=qu_n$.
Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n).

q* *peut-être positif ou négatif *et non nul (sans intérêt)*

Exemples :

- Soit (u_n) , la suite des puissances de 2 , définie par $u_n=2^n$
  Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1}=2^{n+1}=2\times2^n=2\,u_n$
  Cette suite est donc une suite géométrique de raison 2 .
- Soit (v_n) la suite définie par $v_n=n\times5^n$.
  Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=5\times\dfrac{n+1}{n}$, ce qui n'est pas un rapport constant.
  La suite (v_n) n'est donc pas une suite géométrique.

- Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n , par $w_n = 4 \times 3^n$
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = 4 \times 3^{n+1} = 3 \times (4 \times 3^n) = 3 \times w_n$
  Cette suite est donc une suite géométrique de raison 3.

Plus généralement, on montre de la même façon, que toute suite (u_n) définie par $u_n = aq^n$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}^*$) est une suite géométrique de raison q et de premier terme a.

Et la réciproque !!!

B) DÉFINITION PAR UNE FORMULE EXPLICITE

Propriété :

> Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .
> Alors, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = u_0\, q^n$

Preuve :

(u_n) est une suite géométrique, donc $u_1 = u_0\, q$. Puis $u_2 = u_1\, q = (u_0\, q)\, q = u_0\, q^2$
Et ainsi de proche en proche, car lorsqu'on aura établi que pour l'entier naturel p , $u_p = u_0\, q^p$, on en déduira que $u_{p+1} = u_0\, q^{p+1}$.
En effet $u_{p+1} = u_p\, q = u_0\, q^p\, q = u_0\, q^{p+1}$

Exemple : Soit u_n la suite géométrique définie par $u_0 = 7$ et $r = 12$, alors $u_3 = 7 \times 12^3 = 12096$

Plus généralement :

> Soit (u_n) une suite géométrique de raison q . Pour tout entier naturel m et n , on a $u_m = u_n \times q^{m-n}$

Preuve : (Pour la preuve, on suppose que le premier terme de la suite est u_0)
On a $u_m = u_0 \times q^m$ et $u_n = u_0 \times q^n$

$q \neq 0$, donc $\dfrac{u_m}{u_n} = \dfrac{q^m}{q^n} = q^{m-n}$ et $u_m = u_n \times q^{m-n}$

Intérêt : Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)

Exemples :

- Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_{10} = 30$ et $q = 2$.
  On a $u_{13} = u_{10} \times 2^{13-10} = 30 \times 2^3 = 30 \times 8 = 240$

- Soit (v_n) une suite géométrique telle que $v_2 = 5$ et $v_8 = 320$.
  On a $v_8 = v_2 \times q^{8-2}$, donc $320 = 5 \times q^6$ c'est à dire $q^6 = 64$
  Il y a donc deux valeurs possibles $q = 2$ **ou** $q = -2$

Attention : Cette formule ne permet pas de calculer la raison d'une suite géométrique dont on connaît deux termes .

Remarque : Moyenne géométrique

Si a , b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors $b^2 = ac$.
Si trois nombres positifs a , b et c vérifient $b^2 = ac$, on dit que b est la moyenne géométrique de a et c .

C) MONOTONIE

Propriété :

> Soit (u_n) une suite géométrique de raison q (strictement positive) et de terme initial u_0 .
> - Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
>   Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
> - Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
>   Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
> - Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Si $q < 0$ la suite est alternativement positive puis négative …

Idée de preuve :
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_{n+1} = u_0 \times q^{n+1}$
Ainsi $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{(n+1)} - u_0\, q^n = u_0 \times (q^{(n+1)} - q^n) = q^n \times u_0 \times (q-1)$
$q > 0$; on en déduit que le signe de $u_{n+1} - u_n$ est le signe de $u_0 \times (q-1)$ …

D) SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Étude d'un exemple fondamental : SUITE GÉOMETRIQUE DE PREMIER TERME $u_0 = 1$.

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = q^n$ ($q \neq 0$ et $q \neq 1$)

Calculons la somme $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.

On peut écrire : $S = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n$

$q\,S = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n + q^{n+1}$

Par soustraction membre à membre, on obtient :

$S - qS = 1 - q^{n+1}$ c'est à dire $(1-q)\,S = 1 - q^{n+1}$ et donc $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Cas général : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q ($q \neq 0$, $q \neq 1$) .

Calculons la somme $S = u_4 + u_5 + \ldots + u_8$

On a $S = u_4 + qu_4 + q^2 u_4 + q^3 u_4 + q^4 u_4 = u_4 (1 + q + q^2 + q^3 + q^4)$

Ainsi $S = u_4 \dfrac{(1-q^5)}{1-q}$

Propriété :

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q , on applique la formule suivante :

$$\mathbf{S = premier\ terme} \times \frac{\mathbf{1 - q^{nombre\ de\ termes}}}{\mathbf{1 - q}}$$

Exemple :

Soit (v_n) la suite géométrique définie , pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = 2^n$

On a $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 1 \dfrac{(1-2^{n+1})}{1-2} = 2^{(n+1)} - 1$

3) LIMITES DES SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

A) SUITES ARITHMÉTIQUES (évident)

Propriété :

Toute suite arithmétique de raison r non nulle est divergente.

- Si $r > 0$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- Si $r < 0$, alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

B) SUITES GÉOMÉTRIQUES (q^n) (admis)

Propriété :

Soit q un réel .

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors pour tout n , $q^n = 1$ et donc $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est divergente et $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) est divergente

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 supérieure à 1 ; elle est donc divergente et $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Remarque :

On en déduit facilement le cas général $u_o q^n$ …

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = -5 \times 2^n$.

On a vu que $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$; on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$