Expressions d'un polynôme du second degré

Ex 1 : ***QCM - restituer les notions du cours***

1) Parmi ces conditions, laquelle fait partie de la définition d'un trinôme ax^2+bx+c du second degré :
a) $a\neq 0$ b) $b\neq 0$ c) $c\neq 0$

2) Le discriminant d'un trinôme ax^2+bx+c du second degré est :
a) b^2+4ac b) b^2-4ac c) $(b-4ac)^2$ d) b^2-ac

Ex 2 : ***Vrai ou faux - restituer les notions du cours***

Dire si les phrases suivantes sont une reformulation équivalente à la définition d'un trinôme P du second degré :

a) Pour tout réel *x*, il existe trois réels a, b, et c, avec $a\neq 0$, tels que $\mathrm{P}(x)=ax^2+bx+c$.
b) Il existe trois réels a, b, et c, avec $a\neq 0$, tels que pour tout réel x, $\mathrm{P}(x)=ax^2+bx+c$.
c) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists a\in\mathbb{R}^*$, $\exists b\in\mathbb{R}$ et $\exists c\in\mathbb{R}$ tels que $\mathrm{P}(x)=ax^2+bx+c$
d) $\exists a\in\mathbb{R}^*$, $\exists b\in\mathbb{R}$ et $\exists c\in\mathbb{R}$ tels que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{P}(x)=ax^2+bx+c$

Ex 3 : ***QCM - restituer les notions du cours***

Quelles sont les phrases synonymes de :
« -1 est une racine du trinôme $\mathrm{P}(x)=5x^2+4x-1$ »?
a) 1 est l'image de 0 par le trinôme P.
b) 0 est l'image de -1 par le trinôme P.
c) -l est solution de l'équation $\mathrm{P}(x)=0$.
d) 0 est solution de l'équation $\mathrm{P}(x)=-1$.
e) le point de coordonnées (0;-1) appartient à C_P.
f) le point de coordonnées (-1 ;0) appartient à C_P.

Ex 4 : ***Reconnaître un trinôme du second degré***

Reconnaître les fonctions trinôme du second degré
a) $x\longmapsto \sqrt{3}\,x-4x^2+7x$ b) $x\longmapsto \dfrac{2x^2-7}{\sqrt{3}}$
c) $x\longmapsto -\dfrac{x^2(-2x+3x^2)}{3x^2}$ d) $x\longmapsto (\sqrt{x^2+2})^2-3$

Ex 5 : ***De la forme réduite à la forme canonique***

Déterminer la forme canonique de chaque trinôme du second degré.
a) $x\longmapsto x^2-10x+29$ b) $x\longmapsto 9x^2+12x-5$ c) $x\longmapsto \dfrac{1}{3}x^2+6x-1$

Ex 6 : ***De la forme réduite à la forme factorisée***

Déterminer, lorsque cela est possible, la forme factorisée de chaque trinôme du second degré.

a) $x\longmapsto 9x^2-100$ b) $x\longmapsto (x-2)^2+5$ c) $x\longmapsto -3x^2+81$

d) $x\longmapsto \dfrac{1}{4}(x+1)^2-8$ e) $x\longmapsto -\dfrac{1}{4}(x-\sqrt{3})^2+\dfrac{3}{8}$

Ex 7 : ***Variations***

Établir le tableau de variations pour chacun des trinômes suivants :
a) P : $x\longmapsto 2x^2-4x-4$ b) Q : $x\longmapsto -2x^2+3x-10$
c) R : $x\longmapsto 2x-4x^2-4$

Équations du second degré et factorisation

Ex 8 : ***Vrai ou faux - restituer les notions du cours***

a) Si l'on connaît une racine, alors nécessairement, il en existe une seconde, éventuellement confondue.
b) Il existe des trinômes qui n'admettent pas de forme factorisée.
c) Les trinômes qui n'admettent pas de forme factorisée sont ceux pour lesquels $\Delta>0$.

Ex 9 : ***QCM - restituer les notions du cours***

1) Lorsque le discriminant d'un trinôme est nul, on dit qu'il admet :
a) une racine simple b) une racine double c) deux racines confondues.

2) Lorsqu'un trinôme admet deux racines distinctes, ce qui change entre les formules donnant x_1 et x_2 est :
a) le signe devant b b) le signe devant $\sqrt{\Delta}$ c) le signe du numérateur d) le signe du dénominateur

3) Lorsqu'une parabole coupe au moins une fois l'axe des abscisses, le discriminant du trinôme associé est :
a) nul b) strictement positif c) positif ou nul d) strictement négatif

Ex 10 : ***QCM - logique***

Pour chacun des trois couples de propositions ci-dessous, indiquer si :
a) P est une condition nécessaire pour Q
b) P est une condition suffisante pour Q
c) P est une condition équivalente à Q
d) Aucune des trois propositions.

1) P: « Un trinôme admet exactement une racine» et Q: «$\Delta=0$»
2) P : « un trinôme admet au moins une racine » et Q: «$\Delta=0$»
3) P : « un trinôme admet au moins une racine » et Q: «$\Delta\geqslant 0$»

Ex 11 : ***Racines d'un trinôme avec un logiciel de calcul formel puis avec une calculatrice***

Résoudre chacune des équations ci-dessous avec un logiciel de calcul formel puis avec une calculatrice.
a) $6x^2-15x-80=0$ b) $1500x^2+2006x+1876=0$
c) $x^2-\sqrt{17}x-\sqrt{7}=0$

Pensez-vous que toutes les calculatrices donnent des solutions exactes ?

Ex 12 : ***Résoudre une équation du second degré sans Δ***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a) $x^2+5x=0$ b) $3x^2-36=0$
c) $x^2-4x+4=0$ d) $3x^2-6\sqrt{3}x+12=0$

Ex 13 : ***Résoudre une équation du second degré***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation et en déduire, lorsque cela est possible, la forme factorisée du trinôme correspondant.

a) $x^2+\dfrac{1}{3}x+1=0$ b) $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+1=0$

c) $3x^2+7x+1=0$ d) $\sqrt{2}\,x^2+\sqrt{5}\,x+\sqrt{3}=0$

Ex 14 : ***Racine évidente***

1) Soit P le trinôme défini par P : $x\longmapsto 3x^2+4x-7$.
a) Déterminer une racine évidente x_1 de P.

b) Déterminer l'autre racine en utilisant $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

2) Répondre aux questions précédentes dans chacun des cas suivants :

a) Q : $x\longmapsto 2x^2-x-3$ b) R : $x\longmapsto x^2+12x+20$

Ex 15 : ***Factorisation***

Écrire, lorsque cela est possible. chaque polynôme sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

a) x^2-81 b) $x^2+10x+25$ c) $10x-x^2$ d) $(x^2-3)^2-1$

e) $(x^2-3)^2-(x^2+1)^2$ f) $8x^3-4x^2+5x$ g) x^4-12x^2+36

Ex 16 : ***Équations se ramenant à des équations du second degré***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a) $x^4-5x^2+4=0$ b) $x^4-x^2-2=0$ c) $6x-11\sqrt{x}-3=0$

d) $5x^3-3x^2-5x=0$ e) $\dfrac{x}{2x+3}=\dfrac{x-1}{2x}$ f) $1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}=0$

g) $\sqrt{x+1}=x+2$ h) $\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x+2}$

Inéquation du second degré

Ex 17 : ***Résoudre une inéquation du second degré sans*** Δ

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a) $2(x-5)^2+4\geqslant 0$ b) $-3(x-15)^2-4\geqslant 0$ c) $-2(x-5)^2-7\leqslant 0$

d) $5(x+5)^2>0$ e) $-4(3-x)^2>0$

Ex 18 : ***Résoudre une inéquation du second degré***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous : (calculs faits dans l'ex 13 jusqu'à d)

a) $x^2+\dfrac{1}{3}x+1\geqslant 0$ b) $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x+1<0$ c) $3x^2+7x+1>0$

d) $\sqrt{2}x^2+\sqrt{5}x+\sqrt{3}\leqslant 0$ e) $5x^2-6x-20<-x^2-x+4$

Ex 19 : ***Fonctions rationnelles***

Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ des fonctions rationnelles ci-dessous :

a) $f\ :x\longmapsto \dfrac{2x^2-x-1}{x^2-3x-6}$ b) $g\ :x\longmapsto x-2+\dfrac{1}{x+3}$

Utiliser la forme la plus adaptée pour résoudre un problème

Ex 20 :

Dans chacun des cas suivants. déterminer un trinôme P du second degré tel que :

a) P admet pour racines les nombres 4 et 7.

b) P admet une racine double égale à -5.

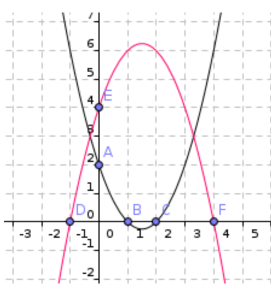
c) P admet pour racines les nombres -9 et 8 et admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

d) P n'admet aucune racine et admet un maximum sur $\mathbb{R}$.

e) La courbe représentative de P admet la droite d'équation $x=-5$ comme axe de symétrie et P admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Ex 21 :

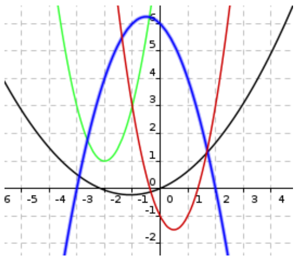
Déterminer les deux trinômes représenter par les paraboles ci-contre :



Ex 22 :

Voici quatre courbes représentatives et quatre fonctions f , g , h et k dont on ne connaît pas les coefficients a_1 ... a_4 .

Malgré ces informations manquantes, associer chaque courbe à sa fonction.



$f(x)=a_1x^2-2x-1$ $g(x)=a_2x^2+\dfrac{3}{7}x$

$h(x)=a_3(x+2)^2+1$ $k(x)=a_4(x-2)(x+3)$

Opérations sur les trinômes

Ex 23 : ***Ensemble de définition***

Dans chacun des cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction, donner une expression simplifiée de la fonction sur son ensemble de définition, puis préciser si la fonction est un trinôme du second degré :

a) $f:x\ \longmapsto\ \dfrac{x^4-4}{x^2+2}$ b) $g:x\ \longmapsto\ \dfrac{x^4-4}{x^2-2}$

c) $h:x\ \longmapsto\ \dfrac{5(6x-7)^2}{25x^2-36x+49}$ d) $i:x\ \longmapsto\ \dfrac{5(x-3)^2}{x^2-6x+9}$

Ex 24 : ***Ensemble de définition***

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

a) $f:x\ \longmapsto \sqrt{3x^2-10x+7}$ b) $g:x\ \longmapsto\ \dfrac{1}{\sqrt{3x^2-10x+7}}$

Égalité de deux trinômes

Ex 25 : ***Fonction rationnelle***

Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x)=\dfrac{12x^2+2x-12}{2x-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2) Démontrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que pour tout

$x\in D_f$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{2x-1}$

Ex 26 : ***Fonction rationnelle***

Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x)=\dfrac{4x^3-6x+15}{x(x+5)}$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

2) Démontrer qu'il existe quatre réels a , b , c et d tels que pour tout $x\in D_f$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{x+5}$

Ex 27 : ***Polynôme de degré 3***

Soit P le polynôme de degré 3 défini par $P(x)=2x^3-x^2-9x-6$.

1) Démontrer que -1 est une racine de P.

2) On peut alors factoriser P comme suit : $P(x)=(x+1)(ax^2+bx+c)$.

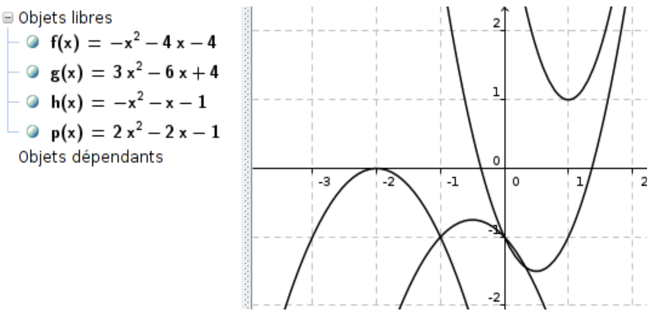
En déduire les valeurs de a , b et c .

3) Factoriser P.

Variation du trinôme – Représentation graphique

Ex 28 :

Associer chaque trinôme à sa courbe représentative en considérant les variations du trinôme et le discriminant :



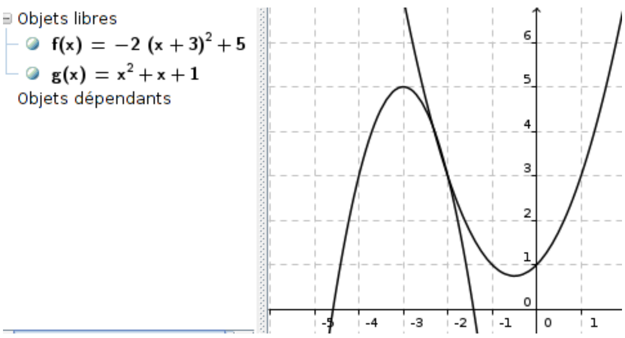
Ex 29 :

Déterminer le trinôme du second degré dont on donne le tableau de variations et le discriminant $\Delta=5$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
P	↗	3	↘

Ex 30 : ***Tangentes ou pas ?***

1) Identifier C_f et C_g .



2) Combien semble-t-il exister de points d'intersections entre C_f et C_g .

3) Vérifier par le calcul.

Problèmes du second degré

Ex 31 : ***Triangle rectangle***

Le triangle de dimensions 3,4 et 6 n'est pas rectangle.
Peut-on, en ajoutant une même longueur à ses trois côtés, obtenir un triangle rectangle ?

Ex 32 : ***Avec des entiers***

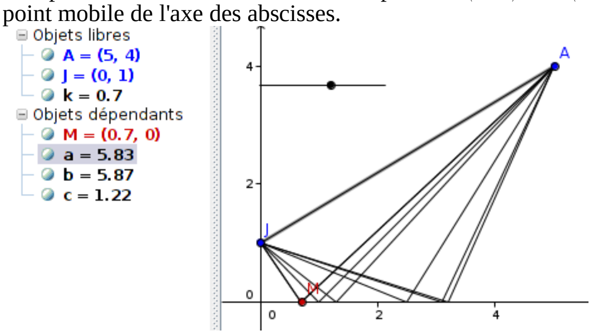
1) Existe-t-il deux nombres entiers consécutifs tels que la somme des carrés est égale à 1985 ? à 20111 ?

2) On considère le cas général où la somme des carrés égale k où $k\in\mathbb{N}$.

Démontrer qu'une condition nécessaire pour que le problème ait au moins une solution est : « $2k-1$ est un carré parfait »

Ex 33 : ***Triangle rectangle dans un repère***

Dans un repère orthonormé, on considère les points $J(0;1)$, $A(5;4)$ et M un point mobile de l'axe des abscisses.



Existe-t-il des positions du points M pour lesquelles le triangle JMA est rectangle en M ?

Si oui, on donnera ses positions exactes.

Ex 34 : ***Optimisation***

AMN est un triangle rectangle en A tel que $AM=x$ cm et $AN=5-x$ cm.

1) Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

2) Existe-t-il une position du point M pour laquelle la longueur MN^2 est maximale ou minimale ? Si tel est le cas, déterminer cette valeur et en déduire la plus grande ou la plus petite valeur de MN.

Algorithme

Ex 35 : ***Triplets pythagoriciens***

(consulter second_degre_algo35_1.htm et second_degre_algo35_2.htm)

Un triplet pythagoricien est un triplet $(x;y;z)$ d'entiers naturels non nuls vérifiant $x^2+y^2=z^2$.

1) Existe-t-il trois nombres entiers naturels consécutifs vérifiant cette relation ?

2) Écrire un algorithme qui, pour chaque entier x de 1 à 100 et, et pour chaque entier y de 1 à 100, teste si x^2+y^2 est un carré et si c'est le cas, affiche le triplet $(x;y;z)$ correspondant.

Aide 1 : On peut utiliser une boucle à l'intérieur d'une boucle.

Aide 2 : Si ent(racine(*n*))*ent(racine(*n*))=*n* alors n est un carré parfait

3) Avec cet algorithme, on obtient le triplet (3,4,5) et le triplet (4,3,5).

Modifier la boucle portant sur l'entier y afin d'éviter le deuxième cas.