

## SECOND DEGRÉ

### 1) TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

#### A ) DÉFINITION

Définition :

On appelle fonction **polynôme du second degré**, ou **trinôme du second degré** toute fonction définie sur  $\mathbb{R}$  qui peut s'écrire sous la forme :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels et } a \neq 0.$$

- On dit que  $a$  est le coefficient de  $x^2$ ,  $b$  le coefficient de  $x$  et  $c$  le terme constant.
- Un polynôme du second degré est toujours défini sur  $\mathbb{R}$ ; il n'est donc pas nécessaire de le répéter systématiquement.

Exemples :

- Les fonctions suivantes définies sur  $\mathbb{R}$  sont des trinômes du second degré :
 
$$x \mapsto 3x^2 + 2x + 3 ; \quad x \mapsto 4x^2 \text{ et } x \mapsto 6x^2 - 2.$$
- La fonction  $x \mapsto (x+1)^2 - (x-1)^2$  n'est pas un trinôme du second degré car pour tout réel  $x$ ,  $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$ .

#### B ) FORME CANONIQUE (retenir la méthode)

Propriété :

Tout trinôme du second degré  $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$  peut s'écrire sous **forme canonique** :

$$P : x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = P(\alpha).$$

Preuve :

Soit un trinôme du second degré  $P$  tel que  $P(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ).

Comme  $a \neq 0$ , pour tout réel  $x$ :  $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ .

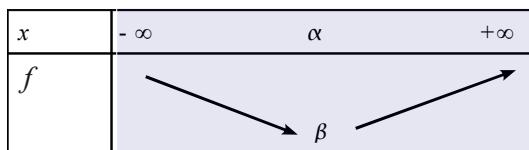
Or  $x^2 + \frac{b}{a}x$  est le début du développement de  $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Donc: } a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ &= a(x-\alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

**Remarque :** le réel  $b^2 - 4ac$  se note  $\Delta$  (delta) et s'appelle **le discriminant du trinôme**.

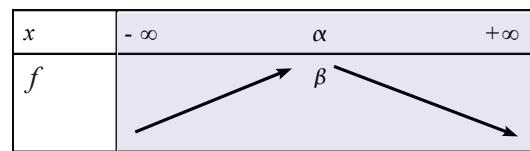
#### C ) VARIATIONS ET PRÉSENTATION GRAPHIQUE (rappel)

$$a > 0$$



Les branches de la parabole sont dirigées vers le haut.

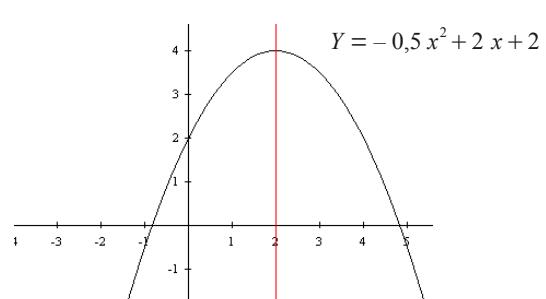
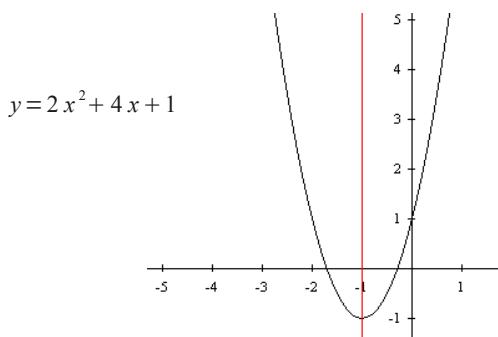
$$a < 0$$



Les branches de la parabole sont dirigées vers le bas.

**Remarques :**

- La représentation graphique dans un repère orthogonal est une parabole, dont le sommet est  $S\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ .
- La droite d'équation  $x = -\frac{b}{2a}$  est un axe de symétrie de  $P$ .



## 2) EQUATION DU SECOND DEGRÉ ET FACTORISATION

### A ) DÉFINITION

Définition :

Une **équation du second degré à une inconnue  $x$**  est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels et } a \neq 0)$$

Soit le trinôme du second degré  $P : x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$  ( $a \neq 0$ )  
L'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  s'écrit aussi  $P(x) = 0$ .

Résoudre cette équation dans  $\mathbb{R}$ , c'est trouver tous les réels  $u$  qui vérifient  $P(u) = 0$ . Ces solutions sont appelées **racines** du trinôme  $P$ .

### B ) RÉSOLUTION

$a \neq 0$ , donc pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0 \Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Il y a alors **3 cas distincts qui dépendent du signe du discriminant**  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Si  $\Delta < 0$ ,  $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$  et alors l'équation n'a pas de solution dans  $\mathbb{R}$ , puisqu'un carré n'est jamais négatif.

Si  $\Delta = 0$ ,  $\frac{\Delta}{4a^2} = 0$  et l'équation équivaut alors à  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$

L'équation a donc une unique solution dans  $\mathbb{R}$ :  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ .

Si  $\Delta > 0$ ,  $\frac{\Delta}{4a^2} > 0$  et l'équation équivaut alors à

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

L'équation a donc deux solutions distinctes dans  $\mathbb{R}$ :  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

**Exemples :**

•  $x^2 - 3x + 4 = 0$  ( $a = 1$ ;  $b = -3$  et  $c = 4$ )

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7, \Delta < 0$$
, donc le trinôme  $x^2 - 3x + 4$  n'a pas de racine.

L'équation n'a donc pas de solution dans  $\mathbb{R}$ :  $S = \emptyset$ .

•  $2x^2 - 12x + 18 = 0$  ( $a = 2$ ;  $b = -12$  et  $c = 18$ )

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0, \Delta = 0$$
 donc le trinôme  $2x^2 - 12x + 18 = 0$  a une seule racine:  $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \times 2} = 3$ .

L'équation a donc une unique solution dans  $\mathbb{R}$ :  $S = \{3\}$ .

•  $6x^2 - x - 1 = 0$  ( $a = 6$ ;  $b = -1$  et  $c = -1$ )

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 1 + 24 = 25 = 5^2, \Delta > 0$$
 donc le trinôme  $6x^2 - x - 1 = 0$  a deux racines:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{2 \times 6} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{2 \times 6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

L'équation a donc deux solutions dans  $\mathbb{R}$ :  $S = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$

**Remarques :**

- Il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant. ( **Exemples :**  $4x^2 - 9 = 0$ ,  $5x^2 - 4x = 0$ , ...)

- Lorsque  $a$  et  $c$  sont de signes contraires**  $-4ac > 0$  donc  $\Delta > 0$  et l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet deux solutions distinctes.

- Lorsque l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet deux racines  $x_1$  et  $x_2$ , alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

**Applications :**

- Vérifier le calcul des solutions de l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$ .

- Trouver une racine connaissant l'autre.

**Exemple :**  $x_1 = 1$  est une solution évidente de  $2x^2 - 5x + 3 = 0$ , donc l'autre racine est  $x_2 = \frac{3}{2}$

- Déterminer le signe des racines sans en connaître les valeurs.

## C) FACTORISATION DU TRINÔME $ax^2 + bx + c$

On a déjà montré que pour tout réel  $x$  de  $\mathbb{R}$ :  $ax^2 + bx + c = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ .

Trois cas se présentent donc:

Si  $\Delta < 0$ , le trinôme n'a pas de racine, il est donc inutile d'espérer factoriser ce trinôme en produit de polynômes du premier degré.

Si  $\Delta = 0$ ,  $ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  et  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  est la **racine double** du trinôme.

Si  $\Delta > 0$ ,  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  où  $x_1$  et  $x_2$  sont les racines du trinôme.

### Exemples :

- $x^2 - 3x + 4$  n'est pas factorisable.
- $2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$  (ce qui aurait pu se déterminer grâce aux identités remarquables...)
- $6x^2 - x - 1 = 6 \left( x + \frac{1}{3} \right) \left( x - \frac{1}{2} \right) = (3x + 1)(2x - 1)$

## 3) SIGNE DU TRINÔME $ax^2 + bx + c$

→ Si  $\Delta > 0$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

On a :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$x - x_1$	—	0	+	+
$x - x_2$	—	—	0	+
$(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	—	+

si  $a > 0$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$a(x - x_1)(x - x_2)$	+	0	—	0

si  $a < 0$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$a(x - x_1)(x - x_2)$	—	0	+	0

**Pour résumer :  $ax^2 + bx + c$  est du signe de  $a$  sauf entre ses racines.**

→ Si  $\Delta \leq 0$ , on a  $f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$  (forme canonique).

- Si  $\Delta < 0$ ,  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$  et donc  $f(x)$  est du signe de  $a$  pour tout réel  $x$ .
- Si  $\Delta = 0$ ,  $f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2$  et  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$  donc  $f(x)$  est du signe de  $a$  pour tout réel  $x \neq -\frac{b}{2a}$  et  $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$ .

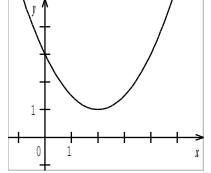
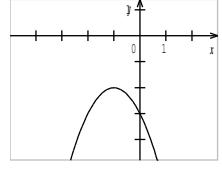
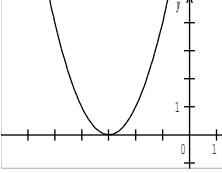
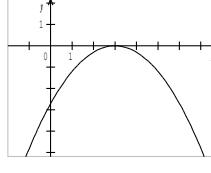
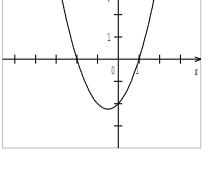
### Exemple :

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $f(x) < 0$  avec  $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = 49$  ( $\Delta > 0$ ) ; les solutions de l'équation  $2x^2 + 5x - 3 = 0$  sont donc  $x_1 = -3$  et  $x_2 = \frac{1}{2}$

Or  $f(x)$  est du signe de  $a = 2$  sauf entre les racines. Ainsi l'ensemble des solutions est  $S = \left] -3 ; \frac{1}{2} \right[$

#### 4) RÉCAPITULATIF ET LIENS AVEC LES PRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

	Équation $ax^2 + bx + c = 0$ Factorisation	Inéquation $ax^2 + bx + c > 0$	Inéquation $ax^2 + bx + c < 0$	
$\Delta < 0$	L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$	<b>Si <math>a &gt; 0</math></b> L'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$ a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$ .	<b>Si <math>a &gt; 0</math></b> L'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ .	
	Le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne se factorise pas	<b>Si <math>a &lt; 0</math></b> L'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ .	<b>Si <math>a &lt; 0</math></b> L'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$ a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$	
$\Delta = 0$	L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une solution (double) dans $\mathbb{R}$ .  Cette solution est: $x_0 = -\frac{b}{2a}$	<b>Si <math>a &gt; 0</math></b> L'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$ a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de $x_0$ .	<b>Si <math>a &gt; 0</math></b> L'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ .	
	Le trinôme $ax^2 + bx + c$ se factorise: $a(x - x_0)^2$	<b>Si <math>a &lt; 0</math></b> L'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ .	<b>Si <math>a &lt; 0</math></b> L'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$ a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de $x_0$ .	
$\Delta > 0$	L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ .  Ces solutions sont: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	<b>Si <math>a &gt; 0</math></b> L'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$ a pour ensemble de solutions $]-\infty ; x_1[ \cup ]x_2 ; +\infty[$	<b>Si <math>a &gt; 0</math></b> L'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$ a pour ensemble de solutions $[x_1 ; x_2[$	
	Le trinôme $ax^2 + bx + c$ se factorise : $a(x - x_1)(x - x_2)$	<b>Si <math>a &lt; 0</math></b> L'inéquation $ax^2 + bx + c > 0$ a pour ensemble de solutions $[x_1 ; x_2[$	<b>Si <math>a &lt; 0</math></b> L'inéquation $ax^2 + bx + c < 0$ a pour ensemble de solutions $]-\infty ; x_1[ \cup ]x_2 ; +\infty[$	