SECOND DEGRÉ

1) TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

A) DÉFINITION

Définition :

On appelle fonction **polynôme du second degré**, ou **trinôme du second degré** toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$x \longmapsto ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.

- On dit que a est le coefficient de x^2, b le coefficient de x et c le terme constant.
- Un polynôme du second degré est toujours défini sur $\mathbb{R}$; il n'est donc pas nécessaire de le répéter systématiquement.

Exemples :

Les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ sont des trinômes du second degré :

- La fonction $x \longmapsto (x+1)^2 - (x-1)^2$ n'est pas un trinôme du second degré car pour tout réel x,

B) FORME CANONIQUE *(retenir la méthode)*

Propriété :

Tout trinôme du second degré P : $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous **forme canonique** :

$$P : x \longmapsto a(x-\alpha)^2 + \beta \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = P(\alpha).$$

Preuve :

Soit un trinôme du second degré P tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Comme $a \neq 0$, pour tout réel x: $\quad ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.

Or $x^2 + \frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

Donc: $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$

Remarque : le réel $b^2 - 4ac$ se note Δ (delta) et s'appelle **le discriminant du trinôme**.

C) VARIATIONS ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE (rappel)

$a > 0$

x	
f	

Les branches de la parabole sont dirigées vers le haut.

$a < 0$

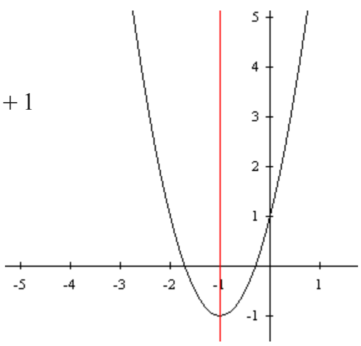
x	
f	

Les branches de la parabole sont dirigées vers le bas.

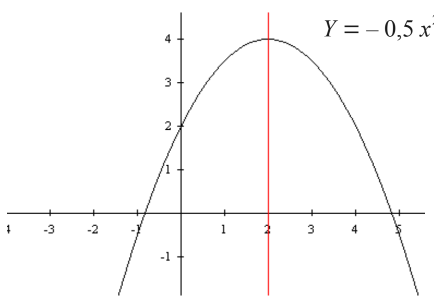
Remarques :

- La représentation graphique dans un repère orthogonal est une parabole , dont le sommet est .
- La droite d'équation

$y = 2x^2 + 4x + 1$



$Y = -0{,}5\,x^2 + 2\,x + 2$



2) EQUATION DU SECOND DEGRÉ ET FACTORISATION

A) DÉFINITION

Définition :

Une **équation du second degré à une inconnue** x est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$ax^2+bx+c=0$ (où a, b et c sont des réels et $a\neq 0$)

Soit le trinôme du second degré $P : x\longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ ($a\neq 0$)
L'équation $ax^2+bx+c=0$ s'écrit aussi $P(x)=0$.
Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$, c'est trouver tous les réels u qui vérifient $P(u)=0$. Ces solutions sont appelées **racines** du trinôme P.

B) RÉSOLUTION

$a\neq 0$, donc pour tout réel $x\in\mathbb{R}$:

$$ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

Il y a alors **3 cas distincts qui dépendent du signe du discriminant** $\Delta=b^2-4ac$.

Si $\Delta<0$, $\frac{\Delta}{4a^2}<0$ et alors l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, puisqu'un carré n'est jamais négatif.
Si $\Delta=0$, $\frac{\Delta}{4a^2}=0$ et l'équation équivaut alors à $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=0\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}$ L'équation a donc une unique solution dans $\mathbb{R}$: $x_0=-\frac{b}{2a}$.
Si $\Delta>0$, $\frac{\Delta}{4a^2}>0$ et l'équation équivaut alors à $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0\Leftrightarrow x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0\ ou\ x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ L'équation a donc deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemples :

- $x^2-3x+4=0$ ($a=1$; $b=-3$ et $c=4$)

- $2x^2-12x+18=0$ ($a=2$; $b=-12$ et $c=18$)

- $6x^2-x-1=0$ ($a=6$; $b=-1$ et $c=-1$)

Remarques :

- Il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant. (**Exemples :**)
- **Lorsque a et c sont de signes contraires** $-4ac>0$ donc $\Delta>0$ et l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions distinctes.
- Lorsque l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux racines x_1 et x_2 , alors :

Applications :

- Vérifier le calcul des solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$.
- Trouver une racine connaissant l'autre .

Exemple :

- Déterminer le signe des racines sans en connaître les valeurs.

C) FACTORISATION DU TRINÔME $ax^2 + bx + c$

On a déjà montré que pour tout réel x de $\mathbb{R}$: $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.

Trois cas se présentent donc:

Si $\Delta<0$, le trinôme n'a pas de racine, il est donc inutile d'espérer factoriser ce trinôme en produit de polynômes du premier degré.
Si $\Delta=0$, $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ et $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ est **<u>la racine double</u>** du trinôme.
Si $\Delta>0$, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.

Exemples :

-
-
-

3) SIGNE DU TRINÔME $ax^2 + bx + c$

➔ Si $\Delta>0$, $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
On a :

x			
$x-x_1$			
$x-x_2$			
$(x-x_1)(x-x_2)$			

si $a>0$

x	
$a(x-x_1)(x-x_2)$	

si $a<0$

x	
$a(x-x_1)(x-x_2)$	

<u>Pour résumer :</u> ax^2+bx+c **est du signe de** a **sauf entre ses racines.**

➔ Si $\Delta\leqslant 0$, on a $f(x)=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ (forme canonique).

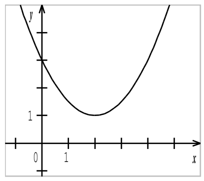
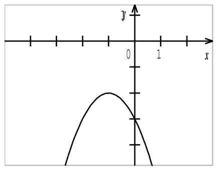
- Si $\Delta<0$, $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}>0$ et donc $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta=0$, $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ et $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$ donc $f(x)$ est du signe de a pour tout réel $x\neq-\dfrac{b}{2a}$ et $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=0$.

Exemple :

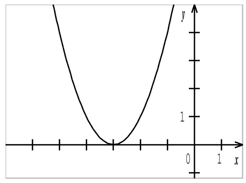
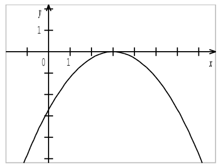
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)<0$ avec $f(x)=2x^2+5x-3$

4) RÉCAPITULATIF ET LIENS AVEC LES REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

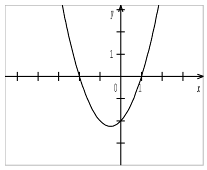
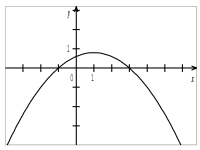
<table>
<tr><th></th><th>Équation
$ax^2+bx+c=0$
Factorisation</th><th>Inéquation
$ax^2+bx+c>0$</th><th>Inéquation
$ax^2+bx+c<0$</th><th></th></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Le trinôme ax^2+bx+c ne se factorise pas</td><td>Si
L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$.</td><td>Si
L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.</td><td></td></tr>
<tr><td>Si
L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.</td><td>Si
L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une solution (double) dans $\mathbb{R}$.

Cette solution est:
$x_0=-\frac{b}{2a}$

Le trinôme ax^2+bx+c se factorise:
$a(x-x_0)^2$</td><td>Si
L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de x_0.</td><td>Si
L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.</td><td></td></tr>
<tr><td>Si
L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.</td><td>Si
L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
a pour ensemble de solutions l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de x_0 .</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

Ces solutions sont:
$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
et
$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Le trinôme ax^2+bx+c se factorise :
$a(x-x_1)(x-x_2)$</td><td>Si
L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
a pour ensemble de solutions
$]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$</td><td>Si
L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
a pour ensemble de solutions
$]x_1\,;\,x_2[$</td><td></td></tr>
<tr><td>Si
L'inéquation
$ax^2+bx+c>0$
a pour ensemble de solutions
$]x_1\,;\,x_2[$</td><td>Si
L'inéquation
$ax^2+bx+c<0$
a pour ensemble de solutions
$]-\infty\,;x_1[\cup]x_2\,;+\infty[$</td><td></td></tr>
</table>