UN PEU PLUS SUR LES FONCTIONS

1) VALEUR ABSOLUE D'UN REEL

Définition :

Pour tout nombre réel x, la **valeur absolue** de x (notée $|x|$) est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples :

- $|5| = 5$ car 5 est un nombre positif.
- $|-3| = 3$ car -3 est un nombre négatif.
- Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geqslant 0$.

Propriétés :

- Dire que $|x| = 0$ équivaut à dire que $x = 0$.
- $|-x| = |x|$
- Dire que $|x| = |a|$ équivaut à dire que $x = a$ ou $x = -a$.
- Pour tout réel x, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Définition :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto |x|$ est appelée **fonction valeur absolue**.

Sens de variations :

- Sur $]-\infty ; 0]$, on a $|x| = -x$, donc la fonction valeur absolue est égale à la **fonction opposée** (fonction linéaire qui à tout x associe son opposé $-x$). Cette fonction a pour coefficient directeur -1, elle est donc strictement décroissante.

- Sur $[0 ; +\infty[$, on a $|x| = x$, donc la fonction valeur absolue est égale à la fonction linéaire de coefficient 1, elle est donc strictement croissante.

Le **tableau des variations** de la fonction valeur absolue est donc :

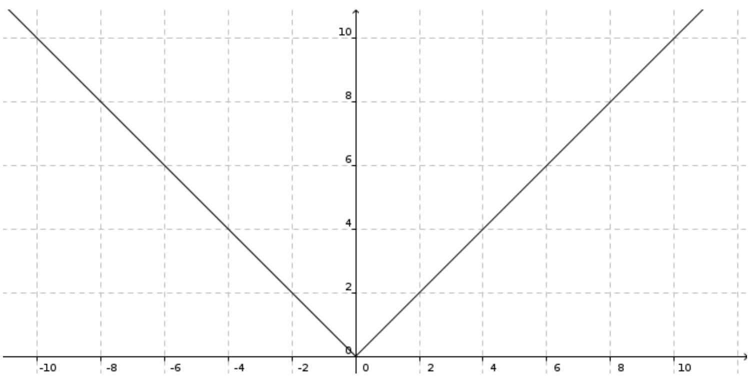
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geqslant 0$ et $|0| = 0$. On en déduit que le minimum de la fonction valeur absolue est 0 et est atteint pour $x = 0$.

Courbe représentative :

Sur $]-\infty ; 0]$, la courbe représentant la fonction $|x|$ est représentée par la demi-droite d'équation $y = -x$.

Sur $[0 ; +\infty[$, la courbe représentant la fonction $|x|$ est représentée par la demi-droite d'équation $y = x$.



Tout point $M(x ; y)$ de la courbe d'équation $y = |x|$ a pour symétrique par rapport à l'axe (Oy) le point $M'(-x ; y)$ qui appartient aussi à la courbe d'équation $y = |x|$.

2) FONCTION RACINE CARRÉE

Définition :

La fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $x \longmapsto \sqrt{x}$, est appelée **fonction racine carrée.**

Propriété :

La fonction racine carrée $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$.

Preuve :

Soit deux réels a et b de l'ensemble de définition de la fonction inverse $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ tels que $a<b$. On a alors:

$$g(a)-g(b)=\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Or $a<b \Leftrightarrow a-b<0$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0$

On en déduit que $g(a)-g(b)<0 \Leftrightarrow g(a)<g(b)$

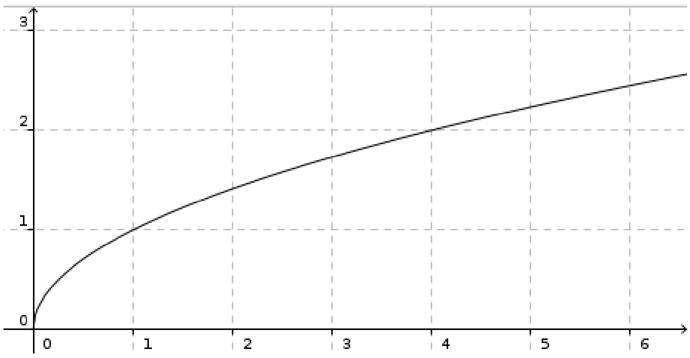
On en déduit que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Le **tableau des variations** de la fonction racine carrée est donc :

x	0	$+\infty$
g	$\nearrow$	

Courbe représentative :

x	0	0,2	0,5	0,8	1	2	3	4	5	6
$\sqrt{x}$ (à 10^{-2} près)	0	0,45	0,71	0,89	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45



3) POSITIONS RELATIVES DES COURBES REPRÉSENTATIVES DES FONCTIONS

$$f : x \longmapsto x,\quad g : x \longmapsto \sqrt{x} \text{ et } h : x \longmapsto x^2 \quad \text{sur } [0\,;+\infty[$$

On a $f(0)=g(0)=h(0)$ et $f(1)=g(1)=h(1)$

On en déduit que que C_f, C_g et C_h se coupent en $O(0\;;0)$ et en $A(1\,;1)$

$\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{h(x)}{f(x)}=\frac{x^2}{x}=x$$

➔ Sur $]0\,;1[$, on a :

- $0<\sqrt{x}<1 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}<1$

  Comme $g(x)>0$, on en déduit que $f(x)<g(x)$ et que C_g est située au-dessus de C_f sur $]0\,;1[$.

- $0<x<1 \Rightarrow \dfrac{h(x)}{f(x)}<1$

  Comme $f(x)>0$, on en déduit que $h(x)<f(x)$ et que C_h est située au-dessous de C_f sur $]0\,;1[$.

➔ Sur $]1\,;+\infty[$, on a :

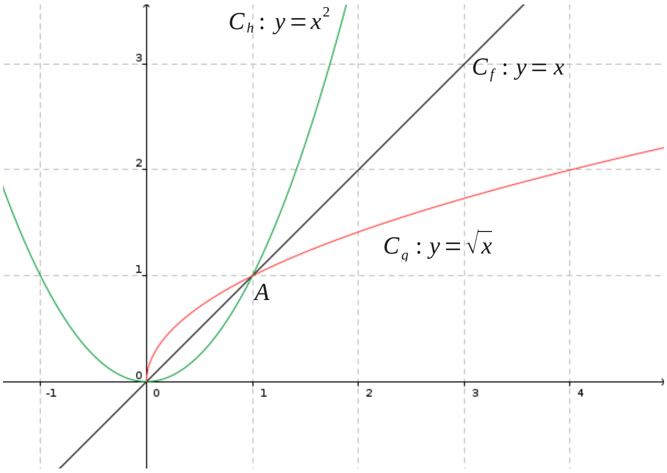
- $\sqrt{x}>1 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)}>1$

  Comme $g(x)>0$, on en déduit que $f(x)>g(x)$ et que C_g est située au-dessous de C_f sur $]0\,;1[$.

- $x>1 \Rightarrow \dfrac{h(x)}{f(x)}>1$

  Comme $f(x)>0$, on en déduit que $h(x)>f(x)$ et que C_h est située au-dessus de C_f sur $]0\,;1[$.

➔ La position relative de C_h et C_g se déduit des résultats précédents.



4) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g , et k un réel non nul.

Opération	Notation	Définition	Définie pour :
fonction **somme** de la fonction f et du réel k	$f+k$	$(f+k)(x)=f(x)+k$	$x\in D_f$
fonction **produit** de la fonction f par le réel k	kf	$(kf)(x)=k\times f(x)$	$x\in D_f$
fonction **somme** des fonctions f et g	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$x\in D_f\cap D_g$
fonction **produit** des fonctions f et g	$f\times g$	$(fg)(x)=f(x)\times g(x)$	$x\in D_f\cap D_g$
fonction **différence** de la fonction f et de la fonction g	$f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$x\in D_f\cap D_g$
fonction **inverse** de la fonction f	$\dfrac{1}{f}$	$\left(\dfrac{1}{f}\right)(x)=\dfrac{1}{f(x)}$	$x\in D_f$ et $f(x)\neq 0$
fonction **quotient** de la fonction f par la fonction g	$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$x\in D_f\cap D_g$ et $g(x)\neq 0$
fonction **racine carrée** de f	$\sqrt{f}$	$(\sqrt{f})(x)=\sqrt{f(x)}$	$x\in D_f$ et $f(x)\geqslant 0$

Exemples : On considère les fonctions $f: x\longmapsto x+1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g: x\longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

- $f+g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $(f+g)(x)=x+1+\dfrac{1}{x}$
- $f\times g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)\times g(x)=(x+1)\times\dfrac{1}{x}=\ 1+\dfrac{1}{x}$
- $5\,f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(5\,f)(x)=5(x+1)=5\,x+5$

5) VARIATIONS

Propriété :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I et k un réel non nul.

Les fonctions f et $f+k$ ont le même sens de variation sur I.

Preuve : *Cas où f est strictement décroissante sur I.*

Soit $a\in I$ et $b\in I$ tels que $a<b$.

f est strictement décroissante sur I, on a donc :

$f(a)>f(b) \Rightarrow f(a)+k>f(b)+k$

On en déduit que $f+k$ est strictement décroissante sur I.

Propriété :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I et k un réel non nul.

Si $k>0$, les fonctions f et kf ont le même sens de variation sur I.

Si $k<0$, les fonctions f et kf ont des sens de variation contraire sur I.

Preuve : *Cas où f est strictement décroissante sur I et $k<0$.*

Soit $a\in I$ et $b\in I$ tels que $a<b$.

f est strictement décroissante sur I, on a donc :

$f(a)>f(b) \Rightarrow kf(a)<kf(b)$ (car $k<0$)

On en déduit que kf est strictement croissante sur I.

Propriété :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I , strictement positive ou strictement négative sur I.

Si f est strictement croissante sur I , alors $\frac{1}{f}$ est strictement décroissante sur I.

Si f est strictement décroissante sur I , alors $\frac{1}{f}$ est strictement croissante sur I.

Preuve : *Cas où f est strictement décroissante sur I et f est strictement positive sur I.*

Soit $a\in I$ et $b\in I$ tels que $a<b$.

f est strictement décroissante sur I, on a donc :

$f(a)>f(b)>0 \Rightarrow \frac{1}{f(b)}>\frac{1}{f(a)}$ (car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$)

On en déduit que $\frac{1}{f}$ est strictement croissante sur I.

Propriété :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I et positive sur I.

Si f est strictement croissante sur I , alors $\sqrt{f}$ est strictement croissante sur I.

Si f est strictement décroissante sur I , alors $\sqrt{f}$ est strictement décroissante sur I.

Preuve : *Cas où f est strictement décroissante sur I.*

Soit $a\in I$ et $b\in I$ tels que $a<b$.

f est strictement décroissante sur I, on a donc :
$f(a)>f(b)\geq 0 \Rightarrow \sqrt{f(a)}>\sqrt{f(b)}$ (car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$)

On en déduit que $\sqrt{f}$ est strictement décroissante sur I.

Remarques :

- Si f et g sont strictement croissantes sur I , alors $f+g$ est strictement croissante sur I.
- Si f et g sont strictement décroissantes sur I , alors $f+g$ est strictement décroissante sur I.
- Pour fg , il faut ajouter des hypothèses sur les signes de f et de g pour obtenir des résultats généraux.