

UN PEU PLUS SUR LES FONCTIONS

1) VALEUR ABSOLUE D'UN REEL

Définition :

Pour tout nombre réel x , la **valeur absolue** de x (notée $|x|$) est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples :

- $|5|=5$ car 5 est un nombre positif.
- $|-3|=3$ car -3 est un nombre négatif.
- Si x est un nombre réel, $|x^2|=x^2$ car $x^2 \geq 0$.

Propriétés :

- Dire que $|x|=0$ équivaut à dire que $x=0$.
- $|-x|=|x|$
- Dire que $|x|=|a|$ équivaut à dire que $x=a$ ou $x=-a$.
- Pour tout réel x , $\sqrt{x^2}=|x|$.

Définition :

La fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto |x|$ est appelée **fonction valeur absolue**.

Sens de variations :

- Sur $]-\infty ; 0[$, on a $|x|=-x$, donc la fonction valeur absolue est égale à la **fonction opposée** (fonction linéaire qui à tout x associe son opposé $-x$). Cette fonction a pour coefficient directeur -1 , elle est donc strictement décroissante.
- Sur $[0 ; +\infty[$, on a $|x|=x$, donc la fonction valeur absolue est égale à la fonction linéaire de coefficient 1 , elle est donc strictement croissante.

Le **tableau des variations** de la fonction valeur absolue est donc :

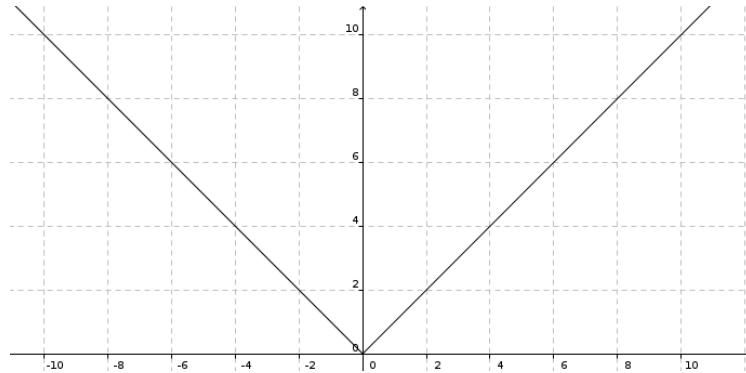
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$ x $		0	

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x| \geq 0$ et $|0|=0$. On en déduit que le minimum de la fonction valeur absolue est 0 et est atteint pour $x=0$.

Courbe représentative :

Sur $]-\infty ; 0[$, la courbe représentant la fonction $|x|$ est représentée par la demi-droite d'équation $y=-x$.

Sur $[0 ; +\infty[$, la courbe représentant la fonction $|x|$ est représentée par la demi-droite d'équation $y=x$.



Tout point $M(x ; y)$ de la courbe d'équation $y=|x|$ a pour symétrique par rapport à l'axe (Oy) le point $M'(-x ; y)$ qui appartient aussi à la courbe d'équation $y=|x|$.

2) FONCTION RACINE CARRÉE

Définition :

La fonction définie sur $[0 ; +\infty]$ par $x \mapsto \sqrt{x}$, est appelée **fonction racine carrée**.

Propriété :

La fonction racine carrée $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est **strictement croissante** sur $[0 ; +\infty]$.

Preuve :

Soit deux réels a et b de l'ensemble de définition de la fonction inverse $g : x \mapsto \sqrt{x}$ tels que $a < b$. On a alors:

$$g(a) - g(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Or $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$

On en déduit que $g(a) - g(b) < 0 \Leftrightarrow g(a) < g(b)$

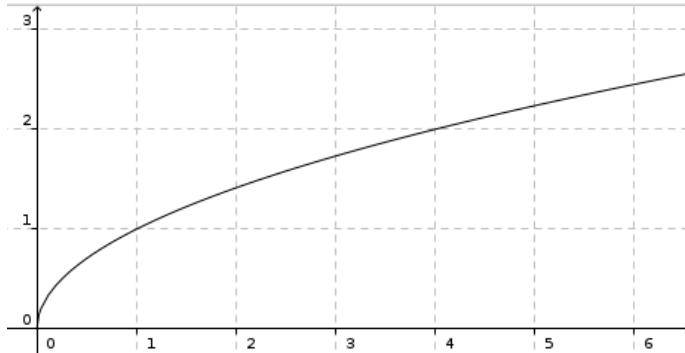
On en déduit que la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty]$.

Le **tableau des variations** de la fonction racine carrée est donc :

x	0	$+\infty$
g		↗

Courbe représentative :

x	0	0,2	0,5	0,8	1	2	3	4	5	6
\sqrt{x} (à 10^{-2} près)	0	0,45	0,71	0,89	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45



3) POSITIONS RELATIVES DES COURBES PRÉSENTATIVES DES FONCTIONS

$$f : x \mapsto x, \quad g : x \mapsto \sqrt{x} \text{ et } h : x \mapsto x^2 \text{ sur } [0 ; +\infty]$$

On a $f(0) = g(0) = h(0)$ et $f(1) = g(1) = h(1)$

On en déduit que les courbes C_f , C_g et C_h se coupent en $O(0 ; 0)$ et en $A(1 ; 1)$

$\forall x \in [0 ; +\infty]$, on a :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{x} = x$$

→ Sur $[0 ; 1]$, on a :

- $0 < \sqrt{x} < 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < 1$

Comme $g(x) > 0$, on en déduit que $f(x) < g(x)$ et que C_g est située au-dessus de C_f sur $[0 ; 1]$.

- $0 < x < 1 \Rightarrow \frac{h(x)}{f(x)} < 1$

Comme $f(x) > 0$, on en déduit que $h(x) < f(x)$ et que C_h est située au-dessous de C_f sur $[0 ; 1]$.

→ Sur $[1 ; +\infty[$, on a :

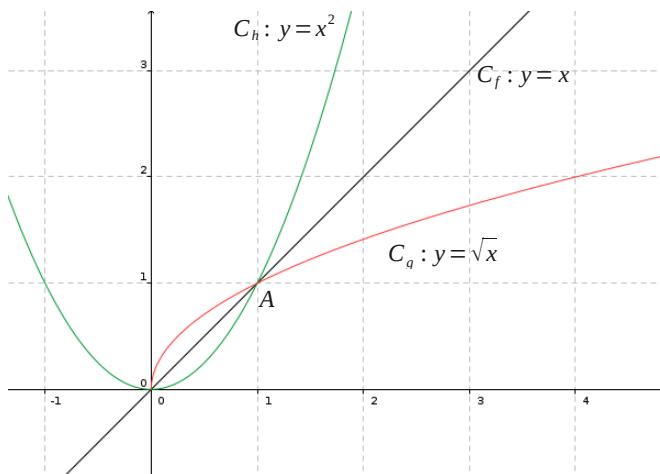
- $\sqrt{x} > 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > 1$

Comme $g(x) > 0$, on en déduit que $f(x) > g(x)$ et que C_g est située au-dessous de C_f sur $[0 ; 1]$.

- $x > 1 \Rightarrow \frac{h(x)}{f(x)} > 1$

Comme $f(x) > 0$, on en déduit que $h(x) > f(x)$ et que C_h est située au-dessus de C_f sur $[0 ; 1]$.

→ La position relative de C_h et C_g se déduit des résultats précédents.



4) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g , et k un réel non nul.

Opération	Notation	Définition	Définie pour :
fonction somme de la fonction f et du réel k	$f + k$	$(f+k)(x) = f(x) + k$	$x \in D_f$
fonction produit de la fonction f par le réel k	kf	$(kf)(x) = k \times f(x)$	$x \in D_f$
fonction somme des fonctions f et g	$f + g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
fonction produit des fonctions f et g	$f \times g$	$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
fonction différence de la fonction f et de la fonction g	$f - g$	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$x \in D_f \cap D_g$
fonction inverse de la fonction f	$\frac{1}{f}$	$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$	$x \in D_f$ et $f(x) \neq 0$
fonction quotient de la fonction f par la fonction g	$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$x \in D_f \cap D_g$ et $g(x) \neq 0$
fonction racine carrée de f	\sqrt{f}	$(\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$	$x \in D_f$ et $f(x) \geq 0$

Exemples : On considère les fonctions $f : x \mapsto x + 1$ définie sur \mathbb{R} et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^*

- $f + g$ est la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $(f+g)(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$

- $f \times g$ est la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) \times g(x) = (x+1) \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

- $5f$ est la fonction définie sur \mathbb{R} par $(5f)(x) = 5(x+1) = 5x + 5$

5) VARIATIONS

Propriété :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I et k un réel non nul.

Les fonctions f et $f + k$ ont le même sens de variation sur I .

Preuve : Cas où f est strictement décroissante sur I .

Soit $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$.

f est strictement décroissante sur I , on a donc :

$$f(a) > f(b) \Rightarrow f(a) + k > f(b) + k$$

On en déduit que $f + k$ est strictement décroissante sur I .

Propriété :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I et k un réel non nul.

Si $k > 0$, les fonctions f et kf ont le même sens de variation sur I .

Si $k < 0$, les fonctions f et kf ont des sens de variation contraire sur I .

Preuve : Cas où f est strictement décroissante sur I et $k < 0$.

Soit $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$.

f est strictement décroissante sur I , on a donc :

$$f(a) > f(b) \Rightarrow kf(a) < kf(b) \text{ (car } k < 0\text{)}$$

On en déduit que kf est strictement croissante sur I .

Propriété :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I , strictement positive ou strictement négative sur I .

Si f est strictement croissante sur I , alors $\frac{1}{f}$ est strictement décroissante sur I .

Si f est strictement décroissante sur I , alors $\frac{1}{f}$ est strictement croissante sur I .

Preuve : Cas où f est strictement décroissante sur I et f est strictement positive sur I .

Soit $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$.

f est strictement décroissante sur I , on a donc :

$$f(a) > f(b) > 0 \Rightarrow \frac{1}{f(b)} > \frac{1}{f(a)} \text{ (car la fonction inverse est strictement décroissante sur } [0 ; +\infty[)$$

On en déduit que $\frac{1}{f}$ est strictement croissante sur I .

Propriété :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I et positive sur I .

Si f est strictement croissante sur I , alors \sqrt{f} est strictement croissante sur I .

Si f est strictement décroissante sur I , alors \sqrt{f} est strictement décroissante sur I .

Preuve : Cas où f est strictement décroissante sur I .

Soit $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$.

f est strictement décroissante sur I , on a donc :

$$f(a) > f(b) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{f(a)} > \sqrt{f(b)} \text{ (car la fonction racine carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+)$$

On en déduit que \sqrt{f} est strictement décroissante sur I .

Remarques :

- Si f et g sont strictement croissantes sur I , alors $f + g$ est strictement croissante sur I .
- Si f et g sont strictement décroissantes sur I , alors $f + g$ est strictement décroissante sur I .
- Pour fg , il faut ajouter des hypothèses sur les signes de f et de g pour obtenir des résultats généraux.