UN PEU PLUS SUR LES FONCTIONS

1) VALEUR ABSOLUE D'UN REEL

Définition :

Pour tout nombre réel x, la **valeur absolue** de x (notée $|x|$) est définie par :

Exemples :

-
-
-

Propriétés :

- Dire que $|x|=0$ équivaut à dire que
- $|-x|=$
- Dire que $|x|=|a|$ équivaut à dire que
- Pour tout réel x, $\sqrt{x^2}=$

Définition :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto |x|$ est appelée **fonction valeur absolue**.

Sens de variations :

- Sur $]-\infty\,;0[$, on a $|x|=-x$, donc la fonction valeur absolue est égale à la **fonction opposée** (fonction linéaire qui à tout x associe son opposé $-x$). Cette fonction a pour coefficient directeur -1, elle est donc strictement décroissante.

- Sur $[0\,;+\infty[$, on a $|x|=x$, donc la fonction valeur absolue est égale à la fonction linéaire de coefficient 1, elle est donc strictement croissante.

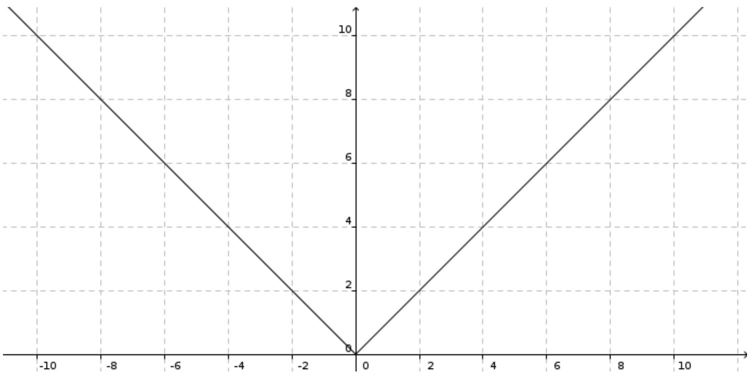
Le **tableau des variations** de la fonction valeur absolue est donc :

x	
$\lvert x\rvert$	

Courbe représentative :

Sur $]-\infty\,;0[$, la courbe représentant la fonction $|x|$ est représentée par la demi-droite d'équation

Sur $[0\,;+\infty[$, la courbe représentant la fonction $|x|$ est représentée par la demi-droite d'équation



Tout point $M(x\,;\,y)$ de la courbe d'équation $y=|x|$ a pour symétrique par rapport à l'axe (Oy) le point $M'(-x\,;y)$ qui appartient aussi à la courbe d'équation $y=|x|$.

2) FONCTION RACINE CARRÉE

Définition :

La fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $x \longmapsto \sqrt{x}$, est appelée **fonction racine carrée.**

Propriété :

La fonction racine carrée $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$.

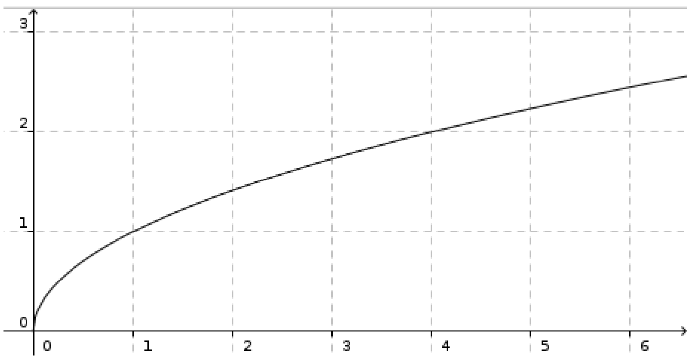
Preuve :

Le **tableau des variations** de la fonction racine carrée est donc :

x	
g	

Courbe représentative :

x	0	0,2	0,5	0,8	1	2	3	4	5	6
$\sqrt{x}$ (à 10^{-2} près)	0	0,45	0,71	0,89	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45



3) POSITIONS RELATIVES DES COURBES REPRÉSENTATIVES DES FONCTIONS

$$f : x \longmapsto x, \quad g : x \longmapsto \sqrt{x} \text{ et } h : x \longmapsto x^2 \quad \text{sur } [0\,;+\infty[$$

On a

On en déduit que que C_f, C_g et C_h se coupent en

$\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, on a :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \qquad \text{et} \qquad \frac{h(x)}{f(x)} =$$

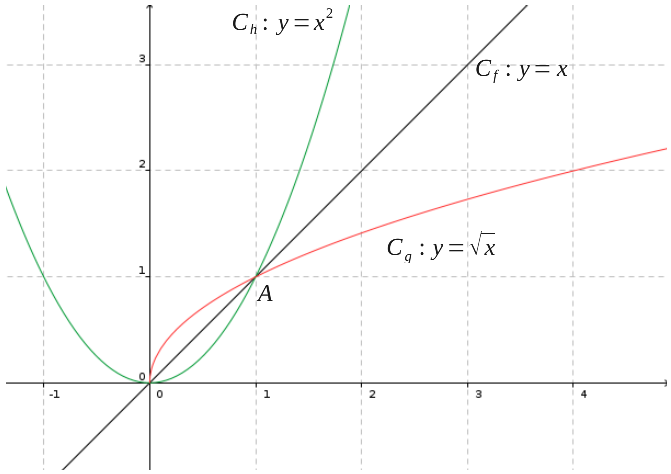
➔ Sur $]0\,;1[$, on a :

- Comme $g(x) > 0$, on en déduit que $f(x) < g(x)$ et que C_g est située au-dessus de C_f sur $]0\,;1[$.
- Comme $f(x) > 0$, on en déduit que $h(x) < f(x)$ et que C_h est située au-dessous de C_f sur $]0\,;1[$.

➔ Sur $]1\,;+\infty[$, on a :

- Comme $g(x) > 0$, on en déduit que $f(x) > g(x)$ et que C_g est située au-dessous de C_f sur $]0\,;1[$.
- Comme $f(x) > 0$, on en déduit que $h(x) > f(x)$ et que C_h est située au-dessus de C_f sur $]0\,;1[$.

➔ La position relative de C_h et C_g se déduit des résultats précédents.



4) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g , et k un réel non nul.

Opération	Notation	Définition	Définie pour :
fonction **somme** de la fonction f et du réel k	$f+k$	$(f+k)(x) = f(x)+k$	
fonction **produit** de la fonction f par le réel k	kf	$(kf)(x) = k \times f(x)$	
fonction **somme** des fonctions f et g	$f+g$	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$	
fonction **produit** des fonctions f et g	$f \times g$	$(fg)(x) = f(x) \times g(x)$	
fonction **différence** de la fonction f et de la fonction g	$f-g$	$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$	
fonction **inverse** de la fonction f	$\dfrac{1}{f}$	$\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$	
fonction **quotient** de la fonction f par la fonction g	$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	
fonction **racine carrée** de f	$\sqrt{f}$	$(\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$	

Exemples : On considère les fonctions $f : x \longmapsto x+1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

- $f+g$ est la fonction définie
- $f \times g$ est la fonction définie
- $5\,f$ est la fonction définie

5) VARIATIONS

Propriété :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I et k un réel non nul.

Les fonctions f et $f+k$ ont le même sens de variation sur I.

Preuve : *Cas où f est strictement décroissante sur I.*

Soit $a \in I$ et $b \in I$ tels que $a < b$.

f est strictement décroissante sur I, on a donc :

$f(a) > f(b) \Rightarrow f(a)+k > f(b)+k$

On en déduit que $f+k$ est strictement décroissante sur I.

Propriété :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I et k un réel non nul.

Si $k > 0$, les fonctions f et kf ont le même sens de variation sur I.

Si $k < 0$, les fonctions f et kf ont des sens de variation contraire sur I.

Preuve : *Cas où f est strictement décroissante sur I et $k < 0$.*

Propriété :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I , strictement positive ou strictement négative sur I.

Si f est strictement croissante sur I , alors $\frac{1}{f}$ est strictement décroissante sur I.

Si f est strictement décroissante sur I , alors $\frac{1}{f}$ est strictement croissante sur I.

Preuve : *Cas où f est strictement décroissante sur I et f est strictement positive sur I.*

Propriété :

Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I et positive sur I.

Si f est strictement croissante sur I , alors $\sqrt{f}$ est strictement croissante sur I.

Si f est strictement décroissante sur I , alors $\sqrt{f}$ est strictement décroissante sur I.

Preuve : *Cas où f est strictement décroissante sur I.*

Remarques :

- Si f et g sont strictement croissantes sur I , alors $f+g$ est strictement croissante sur I.
- Si f et g sont strictement décroissantes sur I , alors $f+g$ est strictement décroissante sur I.
- Pour fg , il faut ajouter des hypothèses sur les signes de f et de g pour obtenir des résultats généraux.