

DÉRIVATION

1) LIMITÉ FINIE D'UNE FONCTION EN ZERO

A) ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto \frac{4-4(1-x)^2}{x}$, $D_f = \mathbb{R}^*$

$f(0)$ n'existe pas, mais $f(x)$ est calculable pour toutes les valeurs de x très voisines de 0. Que deviennent les nombres $f(x)$ lorsque x prend des valeurs voisines de zéro, par exemple celles de $]-0,9 ; 0[\cup]0 ; 0,9[$?

Le tableau de valeurs ci-dessous, nous permet de constater que les nombres $f(x)$ s'accumulent autour de 8, lorsque x est voisin de 0 ...

x	-0,9	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5	0,9
$f(x)$	11,6	10	8,4	8,04	8,004	7,996	7,96	7,6	6	4,4

Le résultat n'est, en fait, pas surprenant. En effet :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^*, \text{ on a: } f(x) = \frac{4-4(1-2x+x^2)}{x} = \frac{8x-4x^2}{x} = 8 - 4x$$

Ainsi, lorsque x prend des valeurs de plus en plus voisines de zéro, les nombres $8 - 4x$ s'accumulent autour de 8.

Plus précisément, ils finissent par se trouver dans tout intervalle $I = [8 - \varepsilon ; 8 + \varepsilon[$, aussi petit que soit ε , ($\varepsilon > 0$). Par exemple, si on choisit $\varepsilon = 0,001$, tous les nombres $8 - 4x$ sont dans I , lorsque $-0,00025 < x < 0,00025$.

On dit alors que 8 est la limite de f en 0 et on note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 8$

B) CAS GÉNÉRAL

Définition :

Soit f une fonction telle que zéro soit dans son ensemble de définition D_f ou soit une borne de D_f .

Intuitivement, dire que f a pour limite L en zéro, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de zéro, « **les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de L** ».

C'est à dire que pour tout ε , ($\varepsilon > 0$), aussi petit qu'il soit, les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $[L - \varepsilon ; L + \varepsilon[$.

On note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$

C) QUELQUES RÉSULTATS A CONNAÎTRE ... (admis)

Remarque importante:

On admet que si une fonction f est définie en 0 et si f admet une limite finie en 0 (on dit que f est continue en 0), alors: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée... et des composées de ces fonctions.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- Soit P une fonction polynôme et Q est une fonction rationnelle définie en 0, alors: $\lim_{x \rightarrow 0} P(x) = P(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} Q(x) = Q(0)$
- Si, de plus, P et Q sont définies et positives au voisinage de 0, alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{P(x)} = \sqrt{P(0)}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{Q(x)} = \sqrt{Q(0)}$
- Soit f et g deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = L'$, alors: $\lim_{x \rightarrow 0} (f+g)(x) = L + L'$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = L \times L'$

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-3x^2 + 2x - 8) = -8 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x+2}{x^2+1} \right) = 2 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{4x+2}{x^2+1}} = \sqrt{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(-3x^2 + 2x - 8 + \sqrt{\frac{4x+2}{x^2+1}} \right) = -8 + \sqrt{2}$$

2) FONCTION DÉRIVABLE – NOMBRE DÉRIVÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et $a \in D_f$.

Définition :

Dire que la fonction f est dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est le réel L , revient à dire que le taux de variation de f en a , $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet pour limite finie L quand h tend vers 0.

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Exemple :

Soit la fonction $f: x \mapsto x^2$ définie sur \mathbb{R} et a un réel quelconque.

Pour $h \neq 0$, on a: $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h$

Or $\lim_{h \rightarrow 0} (2a+h) = 2a$, donc f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

3) QUELQUES APPLICATIONS

A) TANGENTE EN UN POINT

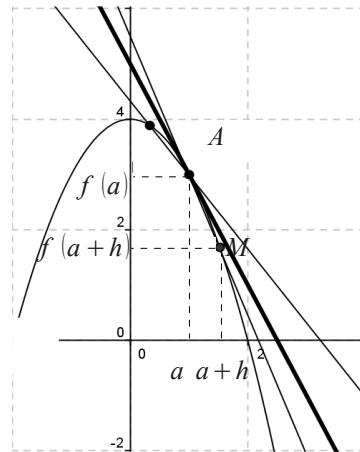
Un peu d'intuition ...

Soit M le point de C_f d'abscisse $a+h$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est: $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Géométriquement, la tangente à C_f au point A se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque M tend vers A en restant sur la courbe.

Si f est dérivable en a , la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f'(a)$, et passe par A .



Propriété :

Si f est dérivable en a , la courbe C_f admet au point $A(a; f(a))$ une tangente T de coefficient directeur $f'(a)$.
Une équation de la tangente en ce point est: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Preuve :

T admet une équation de la forme $y = f'(a)x + p$; de plus elle passe par $A(a; f(a))$...

Cas particuliers importants :

- Si $f'(a) = 0$, C_f admet au point d'abscisse a une tangente parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation $y = f(a)$.
- Si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$ ou $-\infty$, f n'est pas dérivable en a , mais C_f admet une tangente verticale d'équation $x = a$.

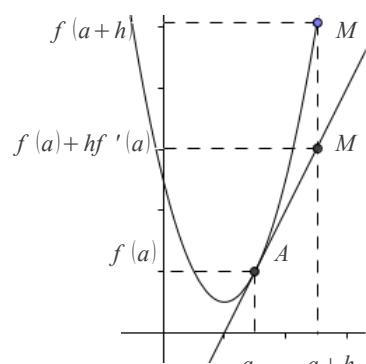
B) APPROXIMATION AFFINE LOCALE (admis)

Propriété :

On dit que $f(a) + hf'(a)$ est la meilleure approximation affine de $f(a+h)$ au voisinage de 0.

Remarques :

- La distance MM' mesure la valeur absolue de l'erreur commise.
- Une autre droite passant par A fournirait une autre approximation affine de $f(a+h)$, mais celle donnée par la tangente est la meilleure. (admis ...mais intuitif)



Exemple :

Le nombre dérivé de la fonction $f: x \mapsto x^2$ en un réel a est $f'(a) = 2a$

Au voisinage de 0, on a donc $(a+h)^2 \approx a^2 + 2ah$

Par exemple, $3,01^2 = (3+0,01)^2 \approx 9 + 2 \times 3 \times 0,01$ donc $3,01^2 \approx 9,06$

Dans ce cas il est possible de déterminer l'erreur commise : elle est de $h^2 = 0,0001$.

Quelques exemples :

Au voisinage de 0 :

$$(1+h)^2 \approx 1 + 2h \quad ; \quad (1+h)^3 \approx 1 + 3h \quad ; \quad \frac{1}{1+h} \approx 1 - h \quad ; \quad \sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{1}{2}h$$

C) UN PEU DE PHYSIQUE : INTERPRÉTATION CINÉMATIQUE DU NOMBRE DÉRIVÉ

Un mobile ponctuel se déplace sur un axe.

On note $d(t)$, la distance qu'il a parcourue à l'instant t . (loi horaire)

Comme vous l'avez peut-être vu en physique, la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0 est la limite des vitesses moyennes $\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

Il s'agit du nombre dérivée en t_0 de la fonction d .

Autres domaines... :

Le taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ mesure en général la variation moyenne d'une grandeur sur un certain intervalle (débit moyen , coût moyen de production ...).

Le nombre dérivé, lui, est une mesure instantanée (débit instantané , coût marginal ...).

4) FONCTIONS DÉRIVÉES

A) DÉFINITION

Définition :

On dit qu'une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I ($I \subset D_f$) si pour tout x appartenant à I , le nombre dérivé de f en x existe.

Par abus de langage, on dit que f' est « la dérivée de f »

La fonction dérivée de f sur I est la fonction, notée f' , qui, à tout x de I , associe le réel $f'(x)$.

Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

Exemple :

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} et sa fonction dérivée est $f' : x \mapsto 2x$.

Remarques :

On appelle **ensemble de dérivabilité** de la fonction f , l'ensemble sur lequel la fonction dérivée f' est définie. Cet ensemble (noté $D_{f'}$) est toujours inclus dans D_f .

B) DÉRIVÉES DE QUELQUES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

	Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivabilité
1)	$f : x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$f' : x \mapsto 0$	\mathbb{R}
2)	$f : x \mapsto x$	$f' : x \mapsto 1$	\mathbb{R}
3)	$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0; +\infty[$ Cette fonction n'est pas dérivable en 0

Preuves:

On choisit toujours h , au voisinage de a et de telle sorte que $f(a+h)$ soit définie.

1) Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour $h \neq 0$, on a $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = 0$.
Donc, pour tout réel a , $f'(a) = 0$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$.

Pour $h \neq 0$, on a $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h} = \frac{h}{h} = 1$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = 1$.
Donc, pour tout réel a , $f'(a) = 1$.

3) Si $a > 0$.

Pour $h > 0$, $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}) \times (\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h \times (\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$
Donc $t(h) = \frac{a+h-a}{h \times (\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$.
Or $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{a+h} = \sqrt{a}$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Si $a = 0$.

Pour $h > 0$, $t(h) = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = +\infty$, ce qui n'est pas un réel...
Donc $f : x \mapsto \sqrt{x}$, n'est pas dérivable en 0.

5) OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

A) SOMME , PRODUIT ...

D représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.

Propriétés :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et k un réel, alors:

- Les fonctions $k \cdot u$, $u + v$ et $u \cdot v$ sont dérivables sur D et:

$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \quad (1), \quad (u + v)' = u' + v' \quad (2) \quad \text{et} \quad (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (3).$$

- Si pour tout réel a de D , $v(a) \neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur D et:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (4), \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \quad (5).$$

Preuves :

1) Soit $a \in D$.

$$\text{Pour } h \neq 0, t(h) = \frac{(k \cdot u)(a+h) - (k \cdot u)(a)}{h} = \frac{k \cdot (u(a+h)) - k \cdot (u(a))}{h} = k \cdot \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = k \cdot u'(a)$, donc $(k \cdot u)'(a) = k \cdot u'(a)$ pour tout $a \in D$.

2) Soit $a \in D$.

$$\text{Pour } h \neq 0, t(h) = \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}.$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$, donc $(u+v)'(a) = u'(a) + v'(a)$ pour tout $a \in D$.

3) Soit $a \in D$.

$$\begin{aligned} \text{Pour } h \neq 0, \quad t(h) &= \frac{(u \cdot v)(a+h) - (u \cdot v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h} \\ t(h) &= \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a+h) + u(a) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h} \\ t(h) &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \end{aligned}$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} v(a+h) = v(a)$,

Alors $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a) = (u \cdot v)'(a)$, pour tout $a \in D$.

4) Soit $a \in D$.

$$\text{Pour tout } h \neq 0, \quad t(h) = \frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{v(a) - v(a+h)}{h \times v(a) \times v(a+h)} = -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a) \times v(a+h)}$$

Or $\lim_{h \rightarrow 0} -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} = -v'(a)$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(a) \times v(a+h)} = \frac{1}{v(a)^2}$.

Donc $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} t(h) = -\frac{v'(a)}{v(a)^2}$, pour tout $a \in D$.

5) Puisque $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$, il suffit de se rapprocher des preuves 3) et 4)...

B) CONSÉQUENCES : de nouvelles formules à retenir

Fonction f	Fonction dérivée f'	Ensemble de dérivation
$f : x \mapsto x^2$	$f' : x \mapsto 2x$	\mathbb{R}
$f : x \mapsto x^3$	$f' : x \mapsto 3x^2$	\mathbb{R}
$f : x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \mapsto n x^{n-1}$	\mathbb{R}
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*
$f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$f' : x \mapsto -\frac{2}{x^3}$	\mathbb{R}^*
$f : x \mapsto \frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$f' : x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*

Remarque :

Pour $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x^n} = x^{-n} = x^m$, alors $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^m)' = mx^{m-1} = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$

Ainsi la formule de la dérivée de $f : x \rightarrow x^n$ est vraie pour tout entier relatif n , en n'oubliant pas la condition $x \neq 0$ si $n < 0$.

C) POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

Propriétés :

- Toute fonction polynôme est une somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc est dérivable sur \mathbb{R} .
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Exemple :

Soit P le polynôme définit sur \mathbb{R} par $P : x \mapsto 3x^3 + 5x^2 - x + 3$

P est une somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc P est dérivable et pour tout réel x :

$$P'(x) = 3 \times 3x^2 + 5 \times 2x - 1 = 9x^2 + 10x - 1.$$

Remarque : Si P est un polynôme de degré $n > 0$, alors P' est un polynôme de degré $n - 1$.

Exemple :

Soit f la fonction rationnelle définie par $f : x \mapsto \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$

On peut écrire $f = \frac{u}{v}$ où $u(x) = 2x^2 + 1$ et $v(x) = x - 1$

On a $v(x) = 0$ pour $x = 1$, donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

u et v sont dérivables sur \mathbb{R} donc sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et pour tout $x \neq 1$, on a:

$$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ donc } f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} \text{ avec } u'(x) = 2 \times 2x = 4x \text{ et } v'(x) = 1$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{4x(x-1) - 1 \times (2x^2 + 1)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}.$$