

## DÉRIVATION

### 1) LIMITÉ FINIE D'UNE FONCTION EN ZERO

#### A) ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Soit  $f : x \mapsto \frac{4-4(1-x)^2}{x}$ ,  $D_f = \mathbb{R}^*$

$f(0)$  n'existe pas, mais  $f(x)$  est calculable pour toutes les valeurs de  $x$  très voisines de 0. Que deviennent les nombres  $f(x)$  lorsque  $x$  prend des valeurs voisines de zéro, par exemple celles de  $]-0,9 ; 0[ \cup ]0 ; 0,9[$ ?

Le tableau de valeurs ci-dessous, nous permet de constater que les nombres  $f(x)$  s'accumulent autour de 8, lorsque  $x$  est voisin de 0 ...

$x$	-0,9	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0,001	0,01	0,1	0,5	0,9
$f(x)$	11,6	10	8,4	8,04	8,004	7,996	7,96	7,6	6	4,4

Le résultat n'est, en fait, pas surprenant. En effet :

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a:  $f(x) = \frac{4-4(1-2x+x^2)}{x} = \frac{8x-4x^2}{x} = 8-4x$

Ainsi, lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus voisines de zéro, les nombres  $8-4x$  s'accumulent autour de 8.

Plus précisément, ils finissent par se trouver dans tout intervalle  $I = [8-\varepsilon ; 8+\varepsilon[$ , aussi petit que soit  $\varepsilon$ , ( $\varepsilon > 0$ ). Par exemple, si on choisit  $\varepsilon = 0,001$ , tous les nombres  $8-4x$  sont dans  $I$ , lorsque  $-0,00025 < x < 0,00025$ .

On dit alors que 8 est la limite de  $f$  en 0 et on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 8$$

#### B) CAS GÉNÉRAL

**Définition :**

Soit  $f$  une fonction telle que zéro soit dans son ensemble de définition  $D_f$  ou soit une borne de  $D_f$ .

Intuitivement, dire que  $f$  a pour limite  $L$  en zéro, signifie que lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus proches de zéro, « **les nombres  $f(x)$  correspondants viennent s'accumuler autour de  $L$**  ».

C'est à dire que pour tout  $\varepsilon$ , ( $\varepsilon > 0$ ), aussi petit qu'il soit, les nombres  $f(x)$  finissent par se situer dans l'intervalle  $[L-\varepsilon ; L+\varepsilon[$ .

On note :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$

#### C) QUELQUES RÉSULTATS A CONNAÎTRE ... ( admis )

**Remarque importante:**

On admet que si une fonction  $f$  est définie en 0 et si  $f$  admet une limite finie en 0 (on dit que  $f$  est continue en 0), alors:  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée... et des composées de ces fonctions.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )
- Soit  $P$  une fonction polynôme et  $Q$  est une fonction rationnelle définie en 0, alors:  $\lim_{x \rightarrow 0} P(x) = P(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} Q(x) = Q(0)$
- Si, de plus,  $P$  et  $Q$  sont définies et positives au voisinage de 0, alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{P(x)} = \sqrt{P(0)}$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{Q(x)} = \sqrt{Q(0)}$
- Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = L'$ , alors:  $\lim_{x \rightarrow 0} (f+g)(x) = L + L'$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} (f \times g)(x) = L \times L'$

**Exemples :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-3x^2 + 2x - 8) = -8 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{4x+2}{x^2+1} \right) = 2 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{4x+2}{x^2+1}} = \sqrt{2} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( -3x^2 + 2x - 8 + \sqrt{\frac{4x+2}{x^2+1}} \right) = -8 + \sqrt{2}$$

## 2) FONCTION DÉRIVABLE – NOMBRE DÉRIVÉ

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et  $a \in D_f$ .

### Définition :

Dire que la fonction  $f$  est dérivable en  $a$  et que le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  est le réel  $L$ , revient à dire que le taux de variation de  $f$  en  $a$ ,  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ , admet pour limite finie  $L$  quand  $h$  tend vers 0.

Le nombre dérivé est noté  $f'(a)$ , et on a:  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

### Exemple :

Soit la fonction  $f: x \mapsto x^2$  définie sur  $\mathbb{R}$  et  $a$  un réel quelconque.

Pour  $h \neq 0$ , on a:  $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = 2a+h$

Or  $\lim_{h \rightarrow 0} (2a+h) = 2a$ , donc  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = 2a$ .

## 3) QUELQUES APPLICATIONS

### A) TANGENTE EN UN POINT

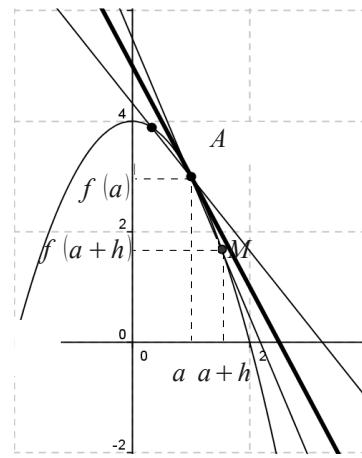
#### Un peu d'intuition ...

Soit  $M$  le point de  $C_f$  d'abscisse  $a+h$ .

Le coefficient directeur de la droite  $(AM)$  est:  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Géométriquement, la tangente à  $C_f$  au point  $A$  se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes  $(AM)$  lorsque  $M$  tend vers  $A$  en restant sur la courbe.

Si  $f$  est dérivable en  $a$ , la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur  $f'(a)$ , et passe par  $A$ .



#### Propriété :

Si  $f$  est dérivable en  $a$ , la courbe  $C_f$  admet au point  $A(a; f(a))$  une tangente  $T$  de coefficient directeur  $f'(a)$ .

Une équation de la tangente en ce point est:  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

#### Preuve:

$T$  admet une équation de la forme  $y = f'(a)x + p$  ; de plus elle passe par  $A(a; f(a))$  ...

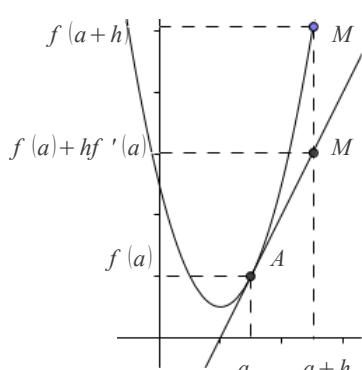
#### Cas particuliers importants:

- Si  $f'(a) = 0$ ,  $C_f$  admet au point d'abscisse  $a$  une tangente parallèle à l'axe des abscisses (horizontale) d'équation  $y = f(a)$ .
- Si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$  ou  $-\infty$ ,  $f$  n'est pas dérivable en  $a$ , mais  $C_f$  admet une tangente verticale d'équation  $x = a$ .

### B) APPROXIMATION AFFINE LOCALE (admis)

#### Propriété :

On dit que  $f(a) + hf'(a)$  est la meilleure approximation affine de  $f(a+h)$  au voisinage de 0.



#### Remarques :

- La distance  $MM'$  mesure la valeur absolue de l'erreur commise.
- Une autre droite passant par  $A$  fournirait une autre approximation affine de  $f(a+h)$ , mais celle donnée par la tangente est la meilleure. (admis ...mais intuitif)

#### Exemple :

Le nombre dérivé de la fonction  $f: x \mapsto x^2$  en un réel  $a$  est  $f'(a) = 2a$

Au voisinage de 0, on a donc  $(a+h)^2 \approx a^2 + 2ah$

Par exemple,  $3,01^2 = (3+0,01)^2 \approx 9 + 2 \times 3 \times 0,01$  donc  $3,01^2 \approx 9,06$

Dans ce cas il est possible de déterminer l'erreur commise : elle est de  $h^2 = 0,0001$ .

#### Quelques exemples :

Au voisinage de 0 :

$$(1+h)^2 \approx 1 + 2h \quad ; \quad (1+h)^3 \approx 1 + 3h \quad ; \quad \frac{1}{1+h} \approx 1 - h \quad ; \quad \sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{1}{2}h$$

## C ) UN PEU DE PHYSIQUE : INTERPRÉTATION CINÉMATIQUE DU NOMBRE DÉRIVÉ

Un mobile ponctuel se déplace sur un axe.

On note  $d(t)$ , la distance qu'il a parcourue à l'instant  $t$ . (loi horaire)

Comme vous l'avez peut-être vu en physique, la vitesse instantanée du mobile à l'instant  $t_0$  est la limite des vitesses moyennes  $\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$  lorsque  $h$  tend vers 0.

Il s'agit du nombre dérivée en  $t_0$  de la fonction  $d$ .

**Autres domaines... :**

**Le taux de variation**  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  mesure en général la variation moyenne d'une grandeur sur un certain intervalle ( débit moyen , coût moyen de production ...).

**Le nombre dérivé**, lui, est une mesure instantanée ( débit instantané , coût marginal ...).

## 4 ) FONCTIONS DÉRIVÉES

### A ) DÉFINITION

**Définition :**

On dit qu'une fonction  $f$  est **dérivable** sur un intervalle  $I$  ( $I \subset D_f$ ) si pour tout  $x$  appartenant à  $I$ , le nombre dérivé de  $f$  en  $x$  existe.

*Par abus de langage, on dit que  $f'$  est « la dérivée de  $f$  »*

Cette définition s'étend à une réunion d'intervalles disjoints.

**Exemple :**

La fonction  $f : x \mapsto x^2$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa fonction dérivée est  $f' : x \mapsto 2x$ .

**Remarques :**

On appelle **ensemble de dérivabilité** de la fonction  $f$ , l'ensemble sur lequel la fonction dérivée  $f'$  est définie. Cet ensemble ( noté  $D_{f'}$  ) est toujours inclus dans  $D_f$ .

### B ) DÉRIVÉES DE QUELQUES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

	Fonction $f$	Fonction dérivée $f'$	Ensemble de dérivabilité
1 )	$f : x \mapsto k$ ( $k \in \mathbb{R}$ )	$f' : x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
2 )	$f : x \mapsto x$	$f' : x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
3 )	$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0 ; +\infty[$ Cette fonction n'est pas dérivable en 0

**Preuves:**

On choisit toujours  $h$ , au voisinage de  $a$  et de telle sorte que  $f(a+h)$  soit définie.

1 ) Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

Pour  $h \neq 0$ , on a  $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{k-k}{h} = 0$ , donc  $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = 0$ .  
Donc, pour tout réel  $a$ ,  $f'(a) = 0$ .

2 ) Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

Pour  $h \neq 0$ , on a  $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a+h-a}{h} = \frac{h}{h} = 1$ , donc  $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = 1$ .  
Donc, pour tout réel  $a$ ,  $f'(a) = 1$ .

3 ) Si  $a > 0$ .

Pour  $h > 0$ ,  $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$   
Donc  $t(h) = \frac{a+h-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$ .  
Or  $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{a+h} = \sqrt{a}$ , donc  $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ .

Si  $a = 0$ .

Pour  $h > 0$ ,  $t(h) = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ , donc  $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = +\infty$ , ce qui n'est pas un réel...  
Donc  $f : x \mapsto \sqrt{x}$ , n'est pas dérivable en 0.

## 5) OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS DÉRIVABLES

### A) SOMME, PRODUIT ...

$D$  représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.

#### Propriétés :

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $D$  et  $k$  un réel, alors:

- Les fonctions  $k \cdot u$ ,  $u + v$  et  $u \cdot v$  sont dérivables sur  $D$  et:
 
$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \quad (1)$$

$$(u + v)' = u' + v' \quad (2)$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (3)$$
- Si pour tout réel  $a$  de  $D$ ,  $v(a) \neq 0$ , les fonctions  $\frac{1}{v}$  et  $\frac{u}{v}$  sont dérivables sur  $D$  et:
 
$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad (4)$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2} \quad (5)$$

#### Preuves :

1) Soit  $a \in D$ .

$$\text{Pour } h \neq 0, t(h) = \frac{(k \cdot u)(a+h) - (k \cdot u)(a)}{h} = \frac{k \cdot (u(a+h)) - k \cdot (u(a))}{h} = k \cdot \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Donc  $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = k \cdot u'(a)$ , donc  $(k \cdot u)'(a) = k \cdot u'(a)$  pour tout  $a \in D$ .

2) Soit  $a \in D$ .

$$\text{Pour } h \neq 0, t(h) = \frac{(u+v)(a+h) - (u+v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} + \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Donc  $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = u'(a) + v'(a)$ , donc  $(u+v)'(a) = u'(a) + v'(a)$  pour tout  $a \in D$ .

3) Soit  $a \in D$ .

$$\text{Pour } h \neq 0, t(h) = \frac{(u \cdot v)(a+h) - (u \cdot v)(a)}{h} = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$$

$$t(h) = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a+h) + u(a) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$$

$$t(h) = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Comme  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} = u'(a)$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h} = v'(a)$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} v(a+h) = v(a)$ ,

Alors  $\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a) = (u \cdot v)'(a)$ , pour tout  $a \in D$ .

4) Soit  $a \in D$ .

$$\text{Pour tout } h \neq 0, t(h) = \frac{\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{v(a) - v(a+h)}{h \times v(a) \times v(a+h)} = -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a) \times v(a+h)}$$

Or  $\lim_{h \rightarrow 0} -\frac{v(a+h) - v(a)}{h} = -v'(a)$  et  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(a) \times v(a+h)} = \frac{1}{v(a)^2}$ .

Donc  $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} t(h) = -\frac{v'(a)}{v(a)^2}$ , pour tout  $a \in D$ .

5) Puisque  $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ , il suffit de se rapprocher des preuves 3) et 4)...

### B) CONSÉQUENCES : de nouvelles formules à retenir

Fonction $f$	Fonction dérivée $f'$	Ensemble de dérivation
$f : x \mapsto x^2$	$f' : x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^3$	$f' : x \mapsto 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )	$f' : x \mapsto n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$	$f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$f' : x \mapsto -\frac{2}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$
$f : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )	$f' : x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

#### Remarque :

Pour  $x \neq 0$ , on a  $\frac{1}{x^n} = x^{-n} = x^m$ , alors  $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^m)' = mx^{m-1} = -nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$

Ainsi la formule de la dérivée de  $f : x \mapsto x^n$  est vraie pour tout entier relatif  $n$ , en n'oubliant pas la condition  $x \neq 0$  si  $n < 0$ .

## C ) POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

### Propriétés :

- Toute fonction polynôme est une somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , donc est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

### Exemple:

Soit  $P$  le polynôme défini sur  $\mathbb{R}$  par  $P : x \mapsto 3x^3 + 5x^2 - x + 3$

$P$  est une somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , donc  $P$  est dérivable et pour tout réel  $x$ :

$$P'(x) = 3 \times 3x^2 + 5 \times 2x - 1 = 9x^2 + 10x - 1.$$

**Remarque:** Si  $P$  est un polynôme de degré  $n > 0$ , alors  $P'$  est un polynôme de degré  $n - 1$ .

### Exemple:

Soit  $f$  la fonction rationnelle définie par  $f : x \mapsto \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$

On peut écrire  $f = \frac{u}{v}$  où  $u(x) = 2x^2 + 1$  et  $v(x) = x - 1$

On a  $v(x) = 0$  pour  $x = 1$ , donc  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

$u$  et  $v$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  et pour tout  $x \neq 1$ , on a:

$$f' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ donc } f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} \text{ avec } u'(x) = 2 \times 2x = 4x \text{ et } v'(x) = 1$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{4x(x-1) - 1 \times (2x^2 + 1)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2}.$$