Ex 1 : ***Vrai ou faux : restituer les notions du cours***

1) Si une fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est négative.

2) Si f est une fonction dont la dérivée est nulle, alors f est constante.

3) Si f est une fonction dérivable en a telle que $f'(a)=0$, alors f admet un maximum local en a .

4) Une fonction f admet un maximum local en 3 sur $[1;4]$ s'il existe un intervalle ouvert $]a;b[$ inclus dans $[1;4]$ et contenant 3 tel que pour tout x appartenant à $]a;b[$, on a $f(x)\leqslant f(3)$.

5) Si une fonction f admet un maximum local en a , alors f est dérivable en a .

Ex 2 : ***Déterminer les variations d'une fonction***

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier les variations de f sur I, puis déterminer les éventuels extrema de f .

1) $f:x \longmapsto x^5-1$, $\mathrm{I}=\mathbb{R}^+$

2) $f:x \longmapsto \sqrt{x}+x-3$, $\mathrm{I}=[2;8]$

3) $f:x \longmapsto x+\dfrac{3}{x}$, $\mathrm{I}=[1;4]$

4) $f:x \longmapsto \dfrac{x-1}{2-x}$, $\mathrm{I}=\mathbb{R}^-$

5) $f:x \longmapsto \dfrac{x^2+3x}{x+1}$, $\mathrm{I}=[0;1]$

6) $f:x \longmapsto (x^2+3)^2$, $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

7) $f:x \longmapsto x\sqrt{x}-x$, $\mathrm{I}=[2;6]$

Ex 3 : ***Variations : deux méthodes***

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier les variations de f sur I en utilisant deux méthodes différentes.
Aide : utiliser la définition d'une fonction monotone sur un intervalle I.

1) $f:x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\mathrm{I}=[1;3]$

2) $f:x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2+2}$, $\mathrm{I}=\mathbb{R}^+$

3) $f:x \longmapsto -x^4+1$, $\mathrm{I}=[1;3]$

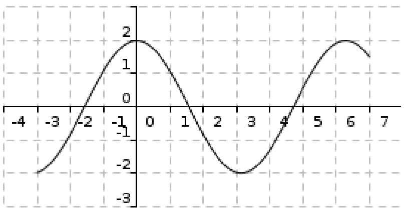
4) $f:x \longmapsto \sqrt{x}(x+3)$, $\mathrm{I}=[3:5]$

5) $f:x \longmapsto -x^8-x^2$, $\mathrm{I}=[-5;5]$

6) $f:x \longmapsto |x-1|$, $\mathrm{I}=[-1;3]$

Ex 4 : ***À partir d'une courbe***

On considère une fonction f dérivable sur $\mathrm{I}=[-3;7]$ dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.



1) Déterminer les variations de f sur I, ainsi que le signe de sa dérivée.

2) Déterminer tous les extrema locaux de f .

Ex 5 : ***Montrer des inégalités***

Démontrer, à l'aide d'une étude fonction, chacune des inégalités proposées sur l'intervalle I.

1) $\dfrac{1}{1-x}\leqslant x-3$, $\mathrm{I}=]1;+\infty[$

Aide : faire le tableau de variation sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction

$$d:x\longmapsto \frac{1}{1-x}-(x-3)$$

2) $x^2\geqslant x\sqrt{x}-\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{I}=]0;4]$

3) $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\leqslant\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{I}=]0;2]$

4) $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$, I= $\mathbb{R}_+^*$

Retrouver ce résultat en développant $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

Ex 6 : ***Trouver une fonction vérifiant des conditions***

Dans chacun des cas suivants, donner un exemple d'une fonction vérifiant la ou les conditions(s) proposée(s) :

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est négative sur $\mathbb{R}$.

2) f est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}^*$.

4) f est définie sur $\mathbb{R}^+$, dérivable uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa fonction dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet un maximum local en 4.

6) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, sa fonction dérivée est positive sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule en 0.

Ex 7 : ***Encadrement***

Soit f la fonction définie sur $\left[-\dfrac{5}{2};2\right]$ par $f(x)=-\dfrac{1}{4}x^4+2x^2-3$.

1) Étudier les variations de f (faire un tableau de variation)

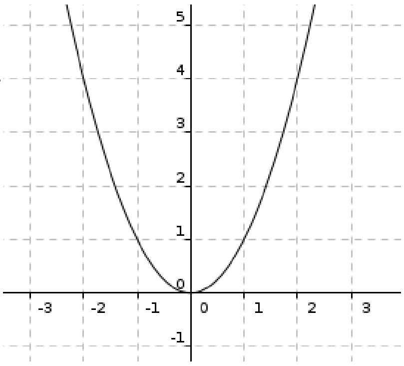
2) Déterminer le maximum et le minimum de $f(x)$ sur $\left[-\dfrac{5}{2};2\right]$

En déduire le meilleur encadrement possible de $f(x)$ sur $\left[-\dfrac{5}{2};2\right]$

3) Déterminer le meilleur encadrement possible de $|f(x)|$ sur $\left[-\dfrac{5}{2};2\right]$

Ex 8 : *Étude de fonctions convexes*

1) Soit $f : x \longmapsto x^2$ et C_f sa courbe représentative donnée ci-dessous :



Tracer les tangentes à C_f aux points d'abscisses -2, -1, 0, 1 et 2. Quelle semble être la position de chacune de ces tangentes par rapport à C_f .

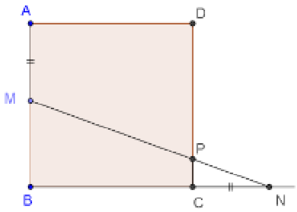
2) Soit a un réel . Déterminer l'équation $y = g_a(x)$ de la tangente à C_f au point d'abscisse a .

Démontrer alors que, pour tout réel x , on a $f(x) \geqslant g_a(x)$.
Une telle fonction est dite convexe.

3) La fonction inverse est-elle convexe sur $]-\infty ; 0[$?
Démontrer en revanche qu'elle l'est sur $\mathbb{R}_+^*$.

Problèmes d'optimisation

Ex 9 : *Distance maximale* (consulter appl_derivation_geo9.html)



ABCD est un carré de côté 1. M est sur le segment [AB].

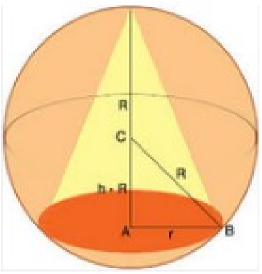
On place le point N tel que CN=AM sur la demi droite [BC) à l'extérieur du segment [BC].
La droite (MN) coupe (DC) en P.
On pose $\text{AM} = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$.
Le but de l'exercice est de trouver M sur [AB] tel que la distance PC soit maximale.

1) Démontrer que $\text{PC} = \dfrac{x - x^2}{1 + x}$

2) a) Étudier les variations de la fonction f définie sur [0;1] par $f(x) = \dfrac{x - x^2}{1 + x}$

b) En déduire la valeur de x pour laquelle la distance PC est maximale.

Ex 10 : *Volume maximal*



Dans une sphère de centre C et de rayon R, on inscrit un cône de révolution de hauteur h .

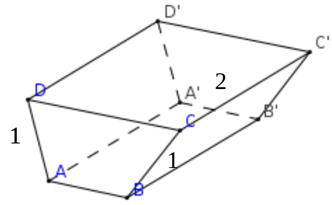
1) Démontrer que le rayon r de la base du cône est égal à $\sqrt{h(2\text{R} - h)}$

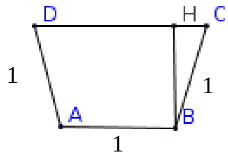
2) a) Calculer le volume du cône en fonction de h .

b) Pour quelle valeur de h le volume est-il maximal ?

Ex 11 : *Volume maximal*

Une benne à la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle $ABCD$.





La longueur du côté CD est variable.
Les autres dimensions sont fixes.
On désigne par x la longueur CH où H est le projeté orthogonal de B sur (CD).
On se propose de déterminer x de façon que la benne ait un volume maximal.

1) Calculer en fonction de x l'aire $S(x)$ du trapèze isocèle ABCD, puis le volume $V(x)$ de la benne.

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1[$ par $f(x) = (x+1)\sqrt{1 - x^2}$

2) Démontrer que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme $f'(x) = \dfrac{1 - x - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$ (utiliser la formule $\sqrt{u}' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$)

3) Étudier le sens de variation de f .

4) Exprimer $V(x)$ à l'aide de $f(x)$.

5) Pour quelle valeur de x le volume de la benne est-il maximal ?

6) Quel est alors le volume de la benne et quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{\text{CBH}}$?

Algorithme

Ex 12 : *Variations d'une fonction homographique*
(consulter appl_derivation_pyth12)

Soit a , b , c et d quatre nombres réels et la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{ax + b}{cx + d} .$$

1) Rappeler à quelle condition la fonction f est une fonction homographique, et donner alors son ensemble de définition D_f .

2) Démontrer que f est dérivable sur D_f , puis calculer sa fonction dérivée.

3) En déduire les variations de f .

4) Écrire un algorithme à qui on fournit quatre réels a , b , c et d , et qui renvoie, lorsque la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est homographique, ses variations.