

APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

1) DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

A) DU SENS DE VARIATION AU SIGNE DE LA DÉRIVÉE

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I .

- Si f est croissante sur I , alors pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$.
- Si f est décroissante sur I , alors pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$.
- Si f est constante sur I , alors pour tout x de I , $f'(x) = 0$.

Preuve : (de la première propriété ... les deux autres se démontrent de la même façon)

Soit $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in I$.

f est croissante sur I ; elle conserve donc le sens des inégalités.

Ainsi les différences $f(x+h) - f(x)$ et $(x+h) - x$ ont le même signe.

On en déduit que le rapport $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est toujours positif.

f est dérivable en x donc $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ admet une limite finie $f'(x)$ lorsque h tend vers 0.

Si l'on donne à h des valeurs proches de 0, alors $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ prend des valeurs positives et sa limite en 0 est donc nécessairement positive.

On a donc $f'(x) \geq 0$.

B) DU SIGNE DE LA DÉRIVÉE AU SENS DE VARIATION

Théorème : admis

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I .

- Si pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .
- Si pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .
- Si pour tout x de I , $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Remarques :

- Si la dérivée f' est strictement positive sur I , sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si la dérivée f' est strictement négative sur I , sauf peut-être en un nombre fini de réels où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

Exemple :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + 9$.

f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = 3x^2$.

$f'(0) = 0$ et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) > 0$.

Ainsi f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

On résume ces résultats dans un tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de f'	+	0	+
f		9	

On indique :

- le signe de f'
- les zéros de f'
- les valeurs de f pour les zéros de f'

On ne met jamais de valeurs approchées dans un tel tableau...

Attention : Il est fondamental de se placer sur **un intervalle**.

Exemple :

La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$.

Et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, ce qui est strictement négatif sur \mathbb{R}^* .

Comme vous le savez ... f n'est pas décroissante sur \mathbb{R}^* ; elle l'est indépendamment sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

Remarques :

Pour étudier le sens de variation d'une fonction il n'est pas toujours utile de dériver. N'oubliez pas :

- **La définition**
- **les sommes de fonctions**

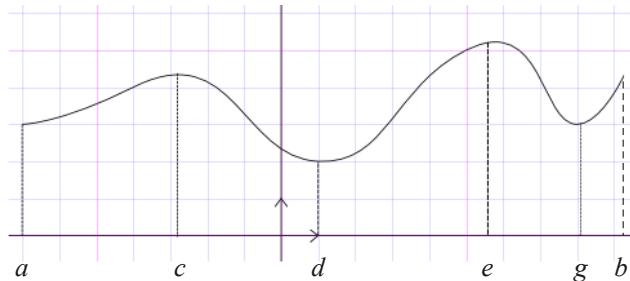
Exemple : Soit $f : x \mapsto x^2 + x - 2$

On peut écrire, $f = u + v$ où $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto x - 2$.

u et v sont deux fonctions croissantes sur $[2 ; +\infty[$; donc f est croissante sur $[2 ; +\infty[$.

2) EXTREMUM D'UNE FONCTION

A) LA NOTION D'EXTREMUM LOCAL (ou relatif)



Sur l'intervalle $[a ; b]$, la fonction f représentée ci-contre admet un maximum en e et un minimum en d .
 « Autour » de c et de g , on remarque que le comportement de f n'est pas banal ...
 On constate que *localement* f admet un maximum en c et un minimum en g .

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et c un réel de I distinct des extrémités.

On dit que f admet un maximum local (respectivement un minimum local) en c si $f(c)$ est le maximum (respectivement minimum) de f restreinte à un intervalle ouvert contenant c .

Remarque sur les extrémités :

Sur un intervalle fermé $[a ; b]$, on peut définir un extremum local en a ou en b .

Par exemple, dire que $f(a)$ est un maximum local signifie que $f(a)$ est le maximum de f sur un intervalle $[a ; \alpha[$, où $\alpha \leq b$.

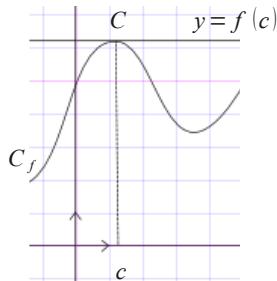
Les fonctions que nous étudierons cette année admettront toujours un extremum en a et en b .

B) QUEL LIEN AVEC LA DÉRIVATION ?

Théorème : admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I .

Si f admet un extremum local en c , alors $f'(c)=0$



Conséquences graphiques:

On a $f'(c)=0$, ainsi le coefficient directeur de la tangente à C_f en C est nul; la tangente est horizontale.

Remarques :

- Il est important que I soit ouvert.

Exemple : $f : x \mapsto x^2$ et $I = [0 ; 1]$, $f(1) = 1$ est le maximum de f sur I et pourtant $f'(1) = 2 \dots$

- Une fonction non dérivable en un réel peut admettre un extremum en ce réel.

Exemple : Pensez à la fonction valeur absolue qui n'est pas dérivable en 0 ...

- La réciproque de ce théorème est fausse: Si $f'(c)=0$, on n'a pas forcément un extremum en c .

Exemple : $f : x \mapsto x^3$, $f'(0)=0$ et pourtant $f(0)$ n'est pas un extremum local de f , mais un point d'inflexion...

Pour fixer les idées, on choisit les extrema éventuels de f parmi les réels c vérifiant :

- c est une borne de I ,
- c est un réel où f n'est pas dérivable,
- c est un réel où f est dérivable et tel que $f'(c)=0$... mais comment choisir ?

Deux configurations à retenir :

Supposons que l'on puisse extraire du tableau de variation d'une fonction une telle configuration...

x	...	c	...
signe de f'	+	0	-
f		$f(c)$	

x	...	c	...
signe de f'	-	0	+
f		$f(c)$	

La dérivée s'annule et change de signe ... il semble que l'on soit en présence d'un extremum local .

Propriété : admise

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et c un réel de I .

Si la dérivée f' s'annule en c en changeant de signe, alors $f(c)$ est un extremum local de f sur I .