TS 8 **Devoir Surveillé n ° 6**

- Durée 2h - Calculatrices autorisées

Barème : 1) 13 pts 2) 7 pts	**Nom :**

Commentaires : Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées .
Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …

Ex 1 :

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Consulter le rappel de cours, en bas de page.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 \text{ et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}.$$

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leqslant x$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f[\ln(n)] = \ln(n) + \dfrac{1}{n}$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n) \leqslant u_n$.
5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}$.
6. **a.** Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

   b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.
7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.

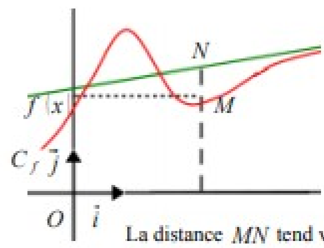
   Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.

Rappel de cours car cette notion n'est plus au programme :

Définition :

Soit a $(a \neq 0)$ et b deux réels et C la courbe représentant une fonction f dans un repère.
Dire que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) revient à dire que :

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0 \qquad \text{(respectivement } \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0\text{)}$$

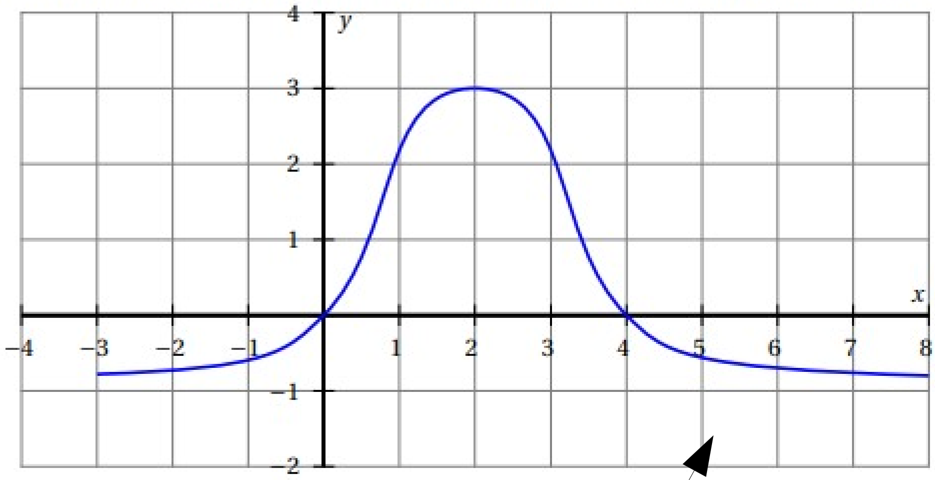


La distance MN tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Remarque :
Une fonction peut avoir une limite infinie lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ sans que sa courbe possède une asymptote. (c'est le cas de la fonction carrée)

Ex 2 :

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $I = [-3\ ;\ 8]$.



A faire ici

On définit la fonction F sur I, par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. **a.** Que vaut $F(0)$?

   b. Donner le signe de $F(x)$:
   — pour $x \in [0\ ;\ 4]$;
   — pour $x \in [-3\ ;\ 0]$.
   Justifier les réponses.

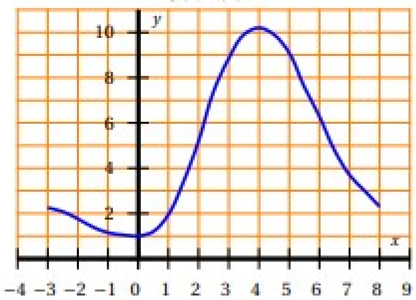
   c. Faire figurer sur le graphique donné en **ANNEXE** les éléments permettant de justifier les inégalités $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$.

2. **a.** Que représente f pour F ?

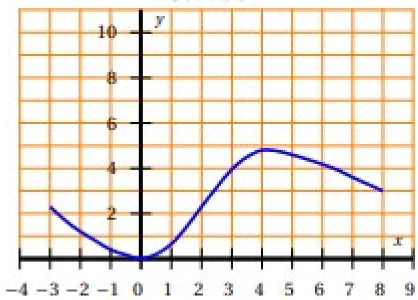
   b. Déterminer le sens de variation de la fonction F sur I. Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de f.

3. On dispose de deux représentations graphiques sur I.

Courbe A



Courbe B



L'une de ces courbes peut-elle représenter la fonction F ? Justifier la réponse.

Correction :

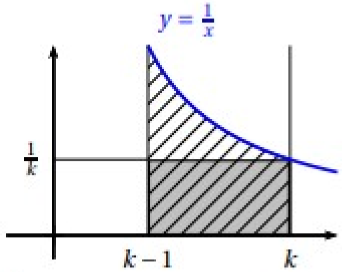
Ex 1 : (D'après Liban 31 mai 2011)

Partie A

1. La fonction est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = 1 - e^{-x}$.
Or $f'(x) > 0 \iff 1 - e^{-x} > 0 \iff 1 > e^{-x} \iff$ (par croissance de la fonction ln) $0 > -x \iff x > 0$.
Conclusion : $f'(x) >$ sur $[0\,;\,+\infty[$: la fonction est croissante sur cet intervalle.
2. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim x \to +\infty f(x) = +\infty$.
3. Soit d la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $d(x) = f(x) - x = e^{-x}$.
On a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ ce qui signifie que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ au voisinage de plus l'infini.

Partie B

1. La fonction g est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$.
Comme $x \geqslant 0$ et $1 + x \geqslant 1 > 0$, le quotient $g'(x)$ est positif ou nul : la fonction g est donc croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. Comme $g(0) = 0$ on en déduit que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $g(x) \geqslant 0 \iff x - \ln(1+x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \ln(1+x) \iff \ln(1+x) \leqslant x$.
2. En appliquant l'inégalité trouvée à $x = \dfrac{1}{n}$, on obtient $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \iff \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n} \iff \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n} \iff \ln(n+1) \leqslant \ln n + \frac{1}{n}$.
3. On a pour tout réel positif x, $f(x) = x + e^{-x}$ d'où avec $n \geqslant 1$,
$f(\ln n) = \ln n + e^{-\ln n} = \ln n + \dfrac{1}{e^{\ln n}} = \ln n + \dfrac{1}{n}$, car pour $n > 1$, $e^{\ln n} = n$.
4. *Initialisation* $\ln 1 \leqslant u_1 = 0 + e^{-0} = 1$ la relation est vraie au rang 1.
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ tel que $\ln n \leqslant u_n$. Donc :
$f(\ln n) \leqslant f(u_n)$ car la fonction f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$. Mais d'après la question 3.
$f(\ln n) = \ln n + \dfrac{1}{n}$, donc $\ln n + \dfrac{1}{n} \leqslant f(u_n) \iff \ln n + \dfrac{1}{n} \leqslant u_{n+1}$.
Mais d'après la question 2. : $\ln(n+1) \leqslant \ln n + \dfrac{1}{n}$, d'où finalement par transitivité :
$\ln(n+1) \leqslant u_{n+1}$.
La relation est vraie au rang 1, et si elle est vraie à un rang au moins égal à 1, elle l'est aussi au rang suivant : on a donc démontré par le principe de récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n) \leqslant u_n$.
5. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$, par comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La suite est divergente.
6. **a.** Un petit dessin vaut mieux qu'un long discours :



Le rectangle gris a une largeur de $\dfrac{1}{k}$ et une longueur de 1, donc une aire de $\dfrac{1}{k}$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ étant décroissante et positive, l'intégrale ci-dessus est égale à l'aire de la surface hachurée, d'où l'inégalité.

b. On a admis que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}$.

On vient de démontrer que pour $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx$, donc l'inégalité précédente devient :

$u_n \leqslant 1 + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \cdots + \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}\,dx$ ou d'après la linéarité de l'intégrale :

$u_n \leqslant 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{x}\,dx$ ou

$u_n \leqslant 1 + [\ln x]_1^{n-1}$ et finalement

$u_n \leqslant 1 + \ln(n-1)$.

7. On a pour $n \geqslant 1$ $\ln(n) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln(n-1) \iff 1 \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)}$.

Or, $\frac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(n-1)}{\ln n} = \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln[n(1-\frac{1}{n})]}{\ln n} = \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln n + \ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n}$

Donc $\frac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln n} + 1 + \frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n}$. Il reste à écrire les limites, mais plus de formes indéterminés ici.

On trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\ln(n-1)}{\ln(n)} = 1$.

Finalement, d'après le théorème des « gendarmes », $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2} = 1$.

Ceci signifie que pour n assez grand $u_n \approx \ln n$.

<u>Ex 2 :</u> (D'après Antilles-Guyane 18 juin 2010)

On définit la fonction F sur I, par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1. **a.** $F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$.

   b. — Soit $x \in [0\ ;\ 4]$. Sur l'intervalle $[0\ ;\ x]$ la fonction f est positive donc, comme $0 \leqslant x$, d'après le cours : $\int_0^x f(t)\,dt \geqslant 0$, c'est-à-dire $F(x) \geqslant 0$.

   — Soit $x \in [-3\ ;\ 0]$. Sur l'intervalle $[x\ ;\ 0]$ la fonction f est négative donc, comme $x \leqslant 0$, on a : $\int_x^0 f(t)\,dt \leqslant 0$ d'où : $-\int_0^x f(t)\,dt \leqslant 0$.

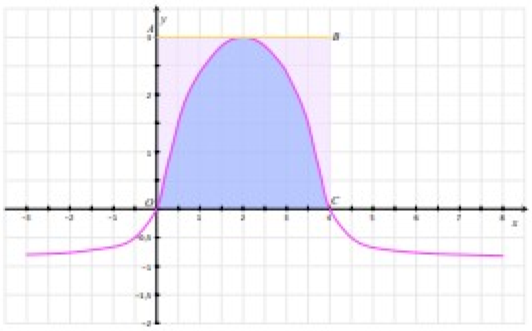
   On a donc : $\int_0^x f(t)\,dt \geqslant 0$, autrement dit $F(x) \geqslant 0$.

   c. Sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$, la fonction f est positive, l'intégrale $\int_0^4 f(t)\,dt$ représente donc l'aire de la portion du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites verticales d'équations respectives $x = 0$ et $x = 4$ (en bleu sur la figure ci-dessous).

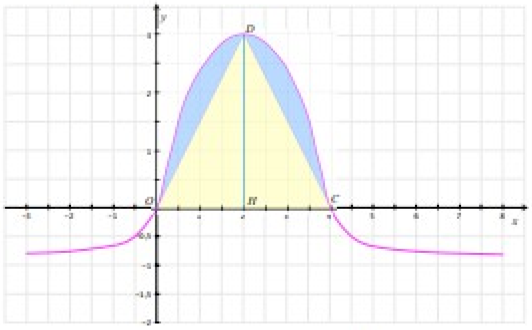
   — La courbe A ne peut représenter la fonction F puisqu'on doit avoir $F(0) = 0$ ce qui n'est pas le cas pour la fonction représentée sur cette courbe.

   — La courbe B ne peut représenter la fonction F puisqu'on doit avoir $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$ ce qui n'est pas le cas pour la fonction représentée sur cette courbe.

Par ailleurs, cette aire est inférieure à l'aire (mauve) du rectangle $OABC$, autrement dit : $F(4) \leqslant OA \times AB$, c'est-à-dire : $F(4) \leqslant 12$.



De même, l'aire $F(4)$ est supérieure à celle du triangle ODC de hauteur $[DH]$ (en jaune sur la figure ci-dessous) donc $F(4) \geqslant \frac{1}{2} \times DH \times OC$, c'est-à-dire $F(4) \geqslant 6$.



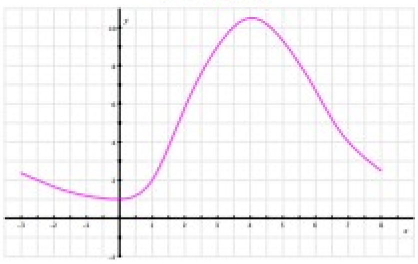
2. **a.** Soit $x \in I$. La fonction f est continue sur I, donc $F : x \longmapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ représente la primitive de f sur I qui s'annule en 0.

   b. D'après ce qui précède, la fonction F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$. Le signe de $f(x)$ s'obtient par lecture graphique. On peut donc dresser le tableau de variation de F :

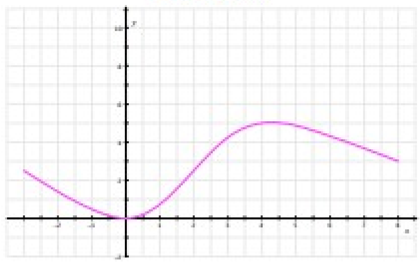
x	-3		0		4		8
Signe de $F'(x) = f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de f	$F(-3)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$F(4)$	$\searrow$	$F(8)$

3. On dispose de deux représentations graphiques sur I.

Courbe A



Courbe B



Les variations des courbes A et B sont en accord avec le tableau de variation précédent, cependant :