<u>T S 8</u>
- Durée 2 h
- Mardi 22 janvier 2018
- Une seule calculatrice autorisée

Devoir Surveillé n°5

<u>Barème indicatif :</u>
1) 10 points
2) 3 points
3) 7 points

Commentaires :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées . Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …

<u>Exercice 1 :</u>

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Une réponse **<u>non justifiée</u>** ne rapporte pas de point.

1. Si $z=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$, alors z^{1000} est un nombre réel.

2. Si $z+\bar{z}=0$, alors $z=0$.

3. Si $z+\frac{1}{z}=0$, alors $z=\mathrm{i}$ ou $z=-\mathrm{i}$.

4. Si $|z|=1$ et si $|z+z'|=1$, alors $z'=0$.

5. L'ensemble des points M du plan d'affixe $z=x+iy$ tels que $|z-1+\mathrm{i}| = |\sqrt{3}-\mathrm{i}|$ est le cercle de centre Ω (1 ;-1) et de rayon $\sqrt{2}$.

<u>Exercice 2 :</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\vec{u};\vec{v})$. Les points A, B et C ont pour affixes respectives $a=2+2\mathrm{i}$, $b=-3-3\mathrm{i}$ et $c=1+\mathrm{i}$.

1. On considère les trois points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a'=\mathrm{j}^2 a$, $b'=\mathrm{j}^2 b$ et $c'=\mathrm{j}^2 c$ où $\mathrm{j}=\frac{-1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   a) Calculer la forme exponentielle de j^2.

   b) En déduire les formes exponentielles de *a*′, *b*′ et *c*′.

2. Montrer que les points A′, B′ et C′ sont alignés.

Exercice 3 :

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante : $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1}{3} z_n + \frac{2}{3} i$.

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n.

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - i$ et on note B_n le point d'affixe u_n.

On note C le point d'affixe i.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, pour tout entier naturel n.

2. En déduire, pour entier naturel n, une expression de u_n en fonction de n.

3. a. Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n.

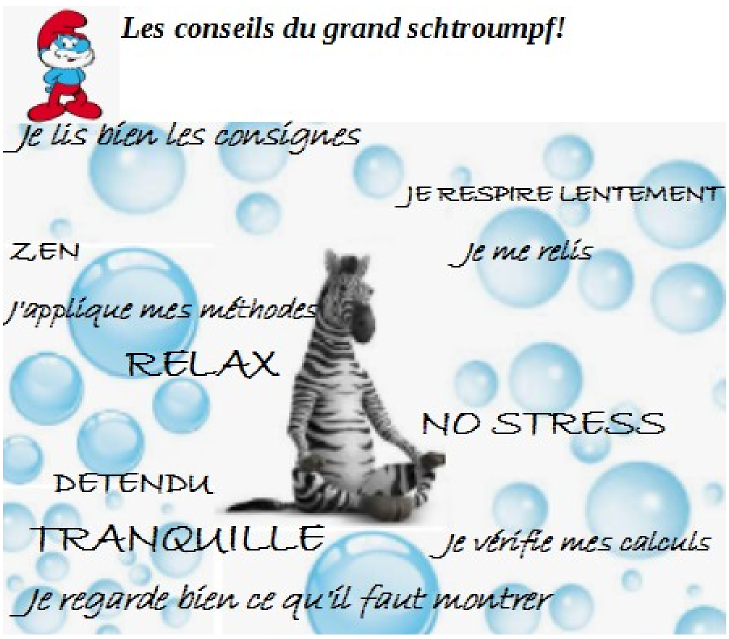
   b. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} |z_n - i|$.

   c. Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

4. a. Soit n un entier naturel. Déterminer un argument de u_n.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points B_n sont alignés sur une droite dont on déterminera l'équation.

   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A_n sont alignés sur une droite dont on déterminera l'équation.



Correction :

Exercice 1 :

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Une réponse **non justifiée** ne rapporte pas de point.

1) Si $z=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$, alors z^{1000} est un nombre réel.

Vrai :

$z=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z^{1000}=\frac{\sqrt{2}}{2}^{1000}\mathrm{e}^{\frac{i*3*1000*\pi}{4}}=\frac{1}{2^{500}}\mathrm{e}^{i*750*\pi}=\frac{1}{2^{500}}$

2) Si $z+\bar{z}=0$, alors $z=0$.

Faux : $z+\bar{z}=0 \Leftrightarrow z=-\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\,\mathbb{R}$

3) Si $z+\frac{1}{z}=0$, alors $z=\mathrm{i}$ ou $z=-\mathrm{i}$.

Vrai : Pour $z\neq 0$, $z+\frac{1}{z}=0$ ev $z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-1 \Leftrightarrow z=\mathrm{i}$ ou $z=-\mathrm{i}$

4) Si |z|=1 et si |z+z'|=1, alors $z'=0$.

Faux : $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}$ et $z'=-i\sqrt{2}$

5) L'ensemble des points M du plan d'affixe $z=x+iy$ tels que | z −1+i| = | $\sqrt{3}$ −i| est le cercle de centre Ω (1 ;-1) et de rayon $\sqrt{2}$.

Faux : On peut montrer que $\mathrm{A}(1+\sqrt{2};-1)$ n'appartient pas à cet ensemble ...

Exercice 2 :

1) a)

$$j^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}$$

b) On obtient :

$a'=...=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{-i5\pi}{12}}$

$b'=...=3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{i7\pi}{12}}$

$c'=...=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{-i5\pi}{12}}$

2) On obtient $\arg(a')=\arg(b')=\arg(c')=\frac{-5\pi}{12}\ [\pi]$

On en déduit que A', B' et C' sont alignés.

Exercice 3 :

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Corrige_S_Nouvelle_Caledonie_27_nov_2018_FH.pdf