T S 4, 5, 8
- Durée 2 h
- Lundi 19 Novembre 2018
- Une seule calculatrice autorisée

Devoir Surveillé n°3

Barème indicatif :
1) 5 points
2) 9 points
3) 6 points

Commentaires :
Lisez l'énoncé en entier avant de commencer et répondez bien aux questions qui vous sont demandées . Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre que vous souhaitez . La rédaction est importante . Soyez propre et clair . Bon courage …

Exercice 1 :

Indiquer pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Soit g la fonction définie sur [0 ; 4[par $g(x)=(x-3)(x^2-\mathrm{E}(x))$, où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x.
Affirmation 1 : g est continue en 3.

Affirmation 2 : g est continue sur [0 ; 2].

Soit h une fonction définie sur [1 ; + ∞ [telle que pour tout $x \geqslant 1$, on a $x^2 \leq h(x)$.

Affirmation 3 : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = +\infty$.
Affirmation 4 : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x^2} = 1$.

Exercice 2 :

Partie A :
g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=3x^3-4x-8$
C est sa courbe représentative dans le plan.

1) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) Déterminer l'expression de $g'(x)$.

3) En déduire les variations de g .

4) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de α à 0,01 près.

Partie B :
f est la fonction définie sur I=]$-\infty$;0[∪]0;$+\infty$ [par $f(x)=\frac{3}{4}x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

C' est sa courbe représentative dans le plan.

1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
Interpréter graphiquement ces résultats.
2) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

3) En déduire les variations de f .
4) On note Δ la droite d'équation $y=\frac{3}{4}x+1$

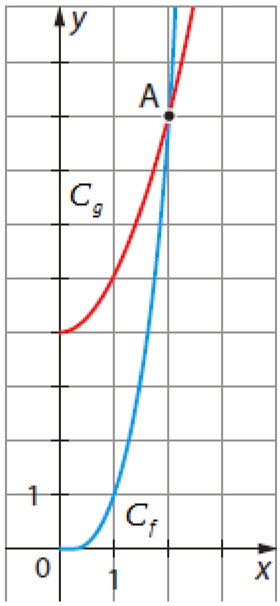
d est la fonction définie sur I par $d(x)=f(x)-\left(\frac{3}{4}x+1\right)$
a) Etudier la position de la courbe C' par rapport à Δ .
b) Déterminer les limites de d en + ∞ et en - ∞ . On dit alors que Δ est asymptote oblique à la courbe C'.

Exercice 3 :

f est la fonction définie sur [0;+ ∞ [par $f(x)=x^3$ et
g est la fonction définie sur [0;+ ∞ [par $g(x)=x^2+4$

On désigne par C_f et C_g les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

C_f et C_g sont tracées ci-contre.



1) Démontrer que $f(x)-g(x)=(x-2)(x^2+x+2)$.

2) Calculer les coordonnées du point d'intersection de C_f et C_g

3) On admet que, pour tout réel m strictement supérieur à 4, la droite d'équation $y=m$ coupe la courbe C_f au point $P(x_P;m)$ et la courbe C_g au point $Q(x_Q;m)$.
L'objectif de cette question est de démontrer qu'il existe une seule valeur de x_P , appartenant à [0;2] telle que la distance PQ soit égale à 1.

a) Exprimer la distance PQ en fonction de x_P et x_Q . Justifier l'égalité $f(x_P)=g(x_Q)$

b) Démontrer que x_P est solution de l'équation (E) : $x^3-x^2+2x-5=0$ puis que (E) a une unique solution dans [0;2].

Déterminer la valeur de x_P (à 0,01 près par défaut) telle que PQ = 1.

<u>**Correction :**</u>

Exercice 1 :

Soit g la fonction définie sur [0 ; 4[par $g(x)=(x-3)(x^2-\mathrm{E}(x))$, où $\mathrm{E}(x)$ désigne la partie entière de x.

Affirmation 1 : g est continue en 3.

$g(3)=(3-3)(3^2-\mathrm{E}(3))=0(9-3)=0$

$\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} E(x)=2$, donc $\lim\limits_{x\to 3^-} x^2-E(x)=7$, or $\lim\limits_{x\to 3} x-3=0$.

Donc par produit, $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x)=0=g(3)$.

de plus, $\lim\limits_{x\to 3} x^2=9$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} E(x)=3$, donc $\lim\limits_{x\to 3^+} x^2-E(x)=6$, or $\lim\limits_{x\to 3} x-3=0$.

Donc par produit, $\lim\limits_{x\to 3^+} g(x)=0=g(3)$.

Donc g est continue en 3. Affirmation vraie.

Affirmation 2 : g est continue sur [0 ; 2].

$g(2)=(2-3)(2^2-\mathrm{E}(2))=-2$.

$\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} E(x)=1$, donc $\lim\limits_{x\to 2^-} x^2-E(x)=4-1=3$, or $\lim\limits_{x\to 2} x-3=-1$.

Donc par produit, $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)=-3\neq g(2)$.

Donc g n'est pas continue en 2, donc g n'est pas continue sur [0 ; 2]. Affirmation fausse.

Soit h une fonction définie sur [1 ; + ∞ [telle que pour tout $x \geqslant 1$, on a $x^2\leqslant h(x)$.

Affirmation 3 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x}=+\infty$.

Comme on a pour tout $x \geqslant 1$, $x^2\leq h(x)$, on a aussi $x\leqslant\dfrac{h(x)}{x}$ (car $x>0$)

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, donc par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x}=+\infty$. Affirmation vraie.

Affirmation 4 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x^2}=1$.

Soit h définie pour tout $x\geqslant 1$ par $h(x)=2x^2$.

Pour tout $x \geqslant 1$, on a $x^2\leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x^2}=2\neq 1$. Affirmation fausse.

Exercice 2 :

Partie A

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=3x^3-4x-8$.

C est sa courbe représentative dans le plan..

1) Déterminer les limites de g en + ∞ et en- ∞ .

Trivial : une fonction polynôme se comporte en l'infini comme son monôme de plus haut degré ou il suffit de factoriser par x^3.

On trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

2) Déterminer l'expression de $g'(x)$.

g est une fonction polynomiale, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x)=9x^2-4$

3) En déduire les variations de g .

Les racines évidentes de g' sont $-\frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-	0	+	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{56}{9}$	$\searrow$	$-\frac{88}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$. Donner un encadrement de α à 0,01 près.

- Pour tout $x \in]-\infty \,;\, \frac{2}{3}]$, $g(x) \leqslant -\frac{56}{9} < 0$.

Donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution sur $]-\infty \,;\, \frac{2}{3}]$.

- Sur $[\frac{2}{3} \,;+\infty[$:

g est continue (car c'est une fonction polynôme) .
g est strictement croisssante.
$g\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{88}{9}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=+\infty$

Comme $0 \in [-\frac{88}{9} \,;+\infty[$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiares (appelé aussi théorème des bijections), l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[\frac{2}{3} \,;+\infty[$.

Avec nSolve de la calculatrice, on obtient : $1{,}7 < \alpha < 1{,}71$.

Partie B

f est la fonction définie sur $I=]-\infty\,;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{3}{4}x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

C' est sa courbe représentative dans le plan.
1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
Interpréter graphiquement ces résultats.

* On montre facilement par opérations sur les limites que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$

* $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{3}{4}x+1=1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=+\infty$. Par somme, on obtient $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=+\infty$

* $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{3}{4}x+1 = 1$

Pour tout $x<0$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} x+1 = 1$. Donc, par quotient $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x+1}{x^2} = +\infty$

Par somme, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

L'axe des ordonnées est donc asymptote verticale à C'.

2) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$.

f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition.

Pour tout $x \neq 0$, on $f'(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{3x^3 - 4x - 8}{4x^3} = \frac{g(x)}{4x^3}$.

3) En déduire les variations de f .

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
x^3		$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$ $\Vert$ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

$f(\alpha) \approx 3{,}21$

4) On note Δ la droite d'équation $y = \frac{3}{4}x+1$.

d est la fonction définie sur I par $d(x) = f(x) - \left(\frac{3}{4}x+1\right)$

a) Etudier la position de la courbe C' par rapport à Δ .

Pour tout $x \neq 0$, $d(x) = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2}$

Si $x=-1$, Δ et C' sont sécantes.

Si $x<-1$, $d(x)<0$ et C' est située au-dessus de Δ .

Si $x>-1$ et $x \neq 0$, $d(x)>0$ et C' est située en dessous de Δ .

b) Déterminer les limites de d en $+\infty$ et en $-\infty$.

On montre facilement que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

La droite Δ est asymptote oblique à C' en l'infini.

Exercice 3 :

f est la fonction définie sur [0;+ ∞ [par $f(x)=x^3$ et *g* est la fonction définie sur [0;+ ∞ [par $g(x)=x^2+4$

On désigne par C_f et C_g les courbes représentant respectivement les fonctions *f* et *g* dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). C_f et C_g sont tracées ci-contre.

1. Démontrer que $f(x)-g(x)=(x-2)(x^2+x+2)$.

$f(x)-g(x)=x^3-(x^2+4)=x^3-x^2-4$ et

$(x-2)(x^2+x+2)=x^3-x^2-4$

donc $f(x)-g(x)=(x-2)(x^2+x+2)$

2. Calculer les coordonnées du point d'intersection de C_f et C_g

Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$ équivaut à résoudre l'équation $(x-2)(x^2+x+2)=0$.
Le discriminant de x^2+x+2 est négatif, donc l'unique solution est 2. $f(2)=g(2)=8$.
le point d'intersection est A(2;8).

3. On admet que, pour tout réel *m* strictement supérieur à 4, la droite d'équation *y* = *m* coupe la courbe C_f au point $P(x_P;m)$ et la courbe C_g au point $Q(x_Q;m)$.

L'objectif de cette question est de démontrer qu'il existe une seule valeur de x_P , appartenant à [0;2] telle que la distance PQ soit égale à 1.
a. Exprimer la distance PQ en fonction de x_P et x_Q .
Justifier l'égalité $f(x_P)=g(x_Q)$

$PQ=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}$

P ∈ C_f donc $f(x_P)=m$ alors $P(x_P;m)$; Q ∈ C_g donc $g(x_Q)=m$ alors $Q(x_Q;m)$ d'où $f(x_P)=g(x_Q)$, on en déduit que $PQ=\sqrt{(x_P-x_Q)^2}=|x_P-x_Q|=x_P-x_Q$.

b. Démontrer que x_P est solution de l'équation (E) : $x^3-x^2+2x-5=0$, puis que (E) a une unique solution dans [0;2].
Déterminer la valeur de x_P (à 0,01 près par défaut) telle que PQ = 1

PQ = 1 donc $x_P-x_Q=1$ et $x_Q=x_P-1$

$f(x_P)=g(x_Q)$, $f(x_P)=g(x_P-1)$ donc $x_P^3=(x_P-1)^2+4$ et après développement x_P est solution de (E).

Soit une fonction *h* définie sur [0;2] par $h(x)=x^3-x^2+2x-5$, $h'(x)=3x^2-2x+2$

$\Delta<0$ pour tout réel x, $h'(x)>0$ donc *h* est strictement croissante sur [0 ; 2].

h continue et strictement croissante sur [0 ; 2]

$h(0)=-5$, $h(2)=3$ et 0 ∈ [-5;3]

Ainsi d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, (E) a une unique solution dans [0;2].

Avec la calculatrice, on trouve $x_P\approx 1{,}63$ à 0,01 près.